

УДК 519.2

О ПРОВЕРКЕ НАЛИЧИЯ СТРУКТУРНЫХ СДВИГОВ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

А.В. Логачев, С.Е. Хрущев

Новосибирский государственный университет
экономики и управления «НИНХ»

E-mail: omboldovskaya@mail.ru, s.e.hrushchev@edu.nsuem.ru

В статье построен критерий (тест), который позволяет проверять гипотезу об однородности и независимости элементов выборки, состоящей из случайных величин, имеющих непрерывное распределение. Построенный критерий является точным и, в отличие от различных критериев серий, не требует накладывания условий на объем выборки, а также условий на моменты случайных величин. Критерий не зависит от распределения наблюдаемых случайных величин и может быть применен, в том числе, и для выборок малого объема. Данный тест подходит для проверки гипотезы об однородности и независимости возмущений (ошибок) регрессионных моделей. В статье также описывается методика применения разработанного критерия для выявления структурных сдвигов, наблюдаемых во временных рядах. При исследовании динамики валового внутреннего продукта Российской Федерации в период с 2000 по 2008 г. с помощью данного критерия выявляется наличие структурного сдвига в 2008 г.

Ключевые слова: выборка, критерий, регрессия, структурный сдвиг, временной ряд.

ABOUT CHECKING THE STRUCTURAL SHEET AVAILABILITY IN RESEARCHES OF TIME SERIES

A.V. Logachev, S.E. Khrushchev

Novosibirsk State University of Economics and Management
E-mail: omboldovskaya@mail.ru, s.e.hrushchev@edu.nsuem.ru

In the article constructs the criterion (test) that allows us to check the hypothesis on the homogeneity and independence of sampling elements of random variables having the continuous distribution. The constructed criterion is exact and, in contrast to the various criteria of the series, does not require the imposition of conditions on the sample size and conditions for the moments of random variables. The criterion does not depend on the distribution of the observed random variables and can be applied, including, for samples of small volume. This test is suitable for testing the hypothesis of homogeneity and independence of perturbations (errors) of regression models. Authors describe the methodology for applying the developed criterion for revealing the structural shifts observed in time series. The structural shift in 2008 is revealed in study of the dynamics of the Russian Federation gross domestic product in the period from 2000 to 2008 years.

Keywords: sample, criterion, regression, structural shift, time series.

1. ВВЕДЕНИЕ

Нас будет интересовать критерий, который позволяет проверять гипотезу об однородности и независимости элементов выборки (далее выборки, обладающие этими двумя свойствами, будем называть простыми) маленького объема, состоящей из случайных величин, имеющих непрерывное рас-

предделение. Отметим, что классические регрессионные модели строятся в предположении о том, что остатки регрессии однородны и независимы [3]. В настоящее время, как правило, независимость остатков регрессии проверяется с помощью критерия Дарбина–Уотсона [5]. Но этот критерий дает достоверные результаты только для выборок большого объема [2, 7].

Чаще всего для проверки простоты выборки в случаях, когда ничего неизвестно о распределении ее элементов, используют различные критерии серий [1]. Заметим, что эти критерии являются асимптотическими, что кроме условия на объем выборки накладываются также некоторые условия на моменты случайных величин, входящих в выборку (см., например, [1]).

Критерий, который будет нами получен, не зависит от распределения случайных величин и может быть применен для выборок малого объема.

Более того, полученный критерий может быть использован для выявления структурных сдвигов при исследовании временных рядов. Выявление структурных сдвигов чаще всего выявляется с помощью теста Чоу [7, 10], а также тестов CUSUM и CUSUMSQ [9]. Структурные сдвиги во временных рядах также изучались в работах [4, 8, 11, 12].

Будем обозначать через $\hat{y}(x)$ функцию, которая задает уравнение выборочной парной линейной регрессии, e_i – остатки регрессии, α – уровень значимости (вероятность допустить ошибку 1-го рода), Z^+ – множество целых неотрицательных чисел.

Работа построена по следующему плану: в разделе 1 делается обзор известных критериев и вводятся обозначения; в разделе 2 доказывается основной результат (Теорема 2.3); в разделе 3 рассматривается пример использования построенного критерия для выявления структурных сдвигов при исследовании временных рядов.

2. КРИТЕРИЙ

Рассмотрим последовательность случайных величин $\{X_n\}$, $n \in Z^+$. Введем обозначения

$$N_{\min} := \min\{n \geq 1: X_n < X_0\}, \quad N_{\max} := \min\{n \geq 1: X_n > X_0\},$$

где $\min \emptyset = \infty$.

Лемма 2.1. Пусть случайные величины $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ – независимые копии случайной величины X , которая имеет непрерывную функцию распределения. Тогда

$$\mathbf{P}(N = n) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

где $N := \max\{N_{\min}, N_{\max}\}$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{P}(N = 1) = 0$. В силу несовместности событий $\{\omega: N_{\min} = n\}$ и $\{\omega: N_{\max} = n\}$ для $n \geq 2$ будем иметь

$$\mathbf{P}(N = n) = \mathbf{P}(\{N_{\min} = n\} \cup \{N_{\max} = n\}) = \mathbf{P}(N_{\min} = n) + \mathbf{P}(N_{\max} = n). \quad (2)$$

В силу того, что случайные величины $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ независимы и одинаково распределены для любого $n \geq 1$, будем иметь

$$\mathbf{P}(N_{\min} > n) = \mathbf{P}(\min_{0 \leq k \leq n} X_k = X_0) = \frac{1}{n+1},$$

поэтому

$$\mathbf{P}(N_{\min} = n) = \mathbf{P}(N_{\min} > n-1) - \mathbf{P}(N_{\min} > n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \quad (3)$$

Полностью аналогично получаем равенство (см. [6])

$$\mathbf{P}(N_{\max} = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \quad (4)$$

Из равенств (2)–(4) следует (1). Лемма доказана.

Замечание 2.2. Из леммы 2.1 очевидным образом следует, что

$$\mathbf{P}(N > n) = \frac{2}{n+1}, \quad n \geq 2.$$

Пусть имеется выборка X_0, X_1, \dots, X_n , взятая из некоторого непрерывного распределения.

Теорема 2.3. Пусть задан уровень значимости α и проверяется гипотеза

H_0 : выборка простая

против конкурирующей гипотезы

H_1 : выборка не простая.

Тогда справедлив критерий:

если $N \leq \frac{2}{\alpha}$, то гипотеза H_0 принимается,

если $N > \frac{2}{\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается.

Доказательство. Очевидным образом следует из замечания 2.2. Теорема доказана.

3. ВЫЯВЛЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ СДВИГОВ ВО ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ

Пусть анализируется некий временной ряд, в котором имеет место так называемый *структурный сдвиг* (со временем изменились фундаментальные характеристики изучаемой системы). Это означает, что модель до этого сдвига и модель после сдвига вообще говоря разные. Например, экономика в 1998–1999 гг. и в 2008–2009 гг. претерпевала структурные изменения в связи с кризисными явлениями, поэтому параметры макроэкономических моделей могут быть разными, до и после этих моментов.

Предположим, что изменения некоторого показателя описываются линейной моделью временного ряда:

$$y_t = a + bt + \varepsilon_t, \quad t = 0, \dots, n.$$

Будем считать, что в момент времени $t = n$ произошел структурный сдвиг. Это приводит не только к изменению параметров модели, но и к неоднородности возмущений ε_t . Если же структурных сдвигов не было, то однородность возмущений ε_t сохранится.

Как уже было отмечено выше, экономика в 1998–1999 гг. и в 2008–2009 гг. претерпевала структурные изменения в связи с кризисными явлениями. В связи с этим рассмотрим изменение динамики валового внутреннего продукта (ВВП) в период с 2000 по 2008 г., используя данные о ВВП Российской Федерации (РФ), приведенные в таблице.

ВВП РФ в период с 2000 по 2008 г. (в ценах 2008 г., млрд руб.)

2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.	2005 г.	2006 г.	2007 г.	2008 г.
24799,9	26062,5	27312,3	29304,9	31407,8	33410,5	36134,6	39218,7	41276,8

В межкризисный период с 2000 по 2007 г. динамика ВВП описывалась следующей моделью:

$$y_t = 23802,7 + 2043,9t + \varepsilon_t, \quad t = 0, \dots, 7. \quad (5)$$

Коэффициент детерминации R^2 равен 0,98, а значения остатков ε_t составили: 997,2; 215,9; -578,3; -629,5; -570,5; -611,8; 68,4; 1108,6.

В период с 2000 по 2008 г. динамика ВВП описывалась моделью

$$y_t = 23628.0 + 2118,8t + \varepsilon_t, \quad t = 0, \dots, 8. \quad (6)$$

Коэффициент детерминации R^2 , как и для модели в межкризисный период, составил 0,98, а значения остатков ε_t равны: 1171,9; 315,7; -553,3; -679,4; -695,3; -811,4; -206,1; 759,2; 698,7.

С помощью построенного в разделе 2 критерия проверим остатки (возмущения) моделей (5) и (6) на простоту (однородность). Для модели (5) $N_{\min} = 1, N_{\max} = 7$. Отсюда следует, что $N = \max\{N_{\min}, N_{\max}\} = 7$. Это значит, что построенный критерий принимает гипотезу о простоте остатков в модели (5) для любого уровня значимости $\alpha \leq 0,29$, а следовательно, принимается гипотеза об однородности остатков в межкризисный период.

Для модели (6) $N_{\min} = 1, N_{\max} = \min\emptyset = \infty$. Отсюда следует, что $N_{\min} = 1, N_{\max} = \min\emptyset = \infty$. Это значит, что построенный критерий отвергает гипотезу о простоте остатков в модели (6) на любом уровне значимости α , а следовательно, отвергается гипотеза об однородности остатков в период наступления кризиса. Это свидетельствует в пользу принятия гипотезы о наличии структурного сдвига в 2008 г.

Литература

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика. М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. М.: Юнити-Дана, 2004. 311 с.
3. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. М.: Дело, 2007. 504 с.
4. Никифоров И.В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. М.: Наука, 1983. 199 с.
5. Суслов В.И., Ибрагимов Н.М., Тальшева Л.П., Цыплаков А.А. Эконометрия. Новосибирск: СО РАН, 2005. 744 с.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Т. 2. М.: Издательство «Мир», 1966. 752 с.
7. Эконометрика: учебник для магистров / И.И. Елисеева (и др.); под ред. И.И. Елисеевой. М.: Издательство «Юрайт», 2012. 453 с.
8. Andrews D.W.K. Test for Parameter Instability and Structural Change With Unknown Change Point // *Econometrica*. 1993. Vol. 61. No. 4. P. 821–856.
9. Brown R.L., Durbin J., Evans J.M. Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationship over Time // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*. 1975. Vol. 37. No. 2. P. 149–192.
10. Chow G.C. Tests of the equality between two sets of coefficients in two linear regressions // *Econometrica*. 1960. Vol. 28. P. 561–605.
11. Eckstein P. Graphical Stability Analysis of Linear Regression Relationship. Humboldt-University to Berlin Institute for Statistics and Econometrics. Berlin, 1998.
12. Maddala G.S., In-Moo Kim. Unit Roots, Cointegration and Structural Change. Cambridge University Press, 1998.

Bibliography

1. Ajvazjan S.A. Prikladnaja statistika. M.: Finansy i statistika, 1983. 471 p.
2. Kremer N.Sh., Putko B.A. Jekonometrika. M.: Juniti-Dana, 2004. 311 p.
3. Magnus Ja.R., Katsyshev P.K., Pereseckij A.A. Jekonometrika. Nachal'nyj kurs. M.: Delo, 2007. 504 p.
4. Nikiforov I.V. Posledovatel'noe obnaruzhenie izmenenija svojstv vremennyh rjadov. M.: Nauka, 1983. 199 p.
5. Suslov V.I., Ibragimov N.M., Talysheva L.P., Cyplakov A.A. Jekonometrija. Novosibirsk: SO RAN, 2005. 744 p.
6. Feller V. Vvedenie v teoriju verojatnostej i ee prilozhenija, T. 2. M.: Izdatel'stvo «Mir», 1966. 752 p.
7. Jekonometrika: uchebnik dlja magistrov / I.I. Eliseeva (i dr.); pod red. I.I. Eliseevoj. M.: Izdatel'stvo «Jurajt», 2012. 453 p.
8. Andrews D.W.K. Test for Parameter Instability and Structural Change With Unknown Change Point // *Econometrica*. 1993. Vol. 61. No. 4. P. 821–856.
9. Brown R.L., Durbin J., Evans J.M. Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationship over Time // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*. 1975. Vol. 37. No. 2. P. 149–192.
10. Chow G.C. Tests of the equality between two sets of coefficients in two linear regressions // *Econometrica*. 1960. Vol. 28. P. 561–605.
11. Eckstein P. Graphical Stability Analysis of Linear Regression Relationship. Humboldt-University to Berlin Institute for Statistics and Econometrics. Berlin, 1998.
12. Maddala G.S., In-Moo Kim. Unit Roots, Cointegration and Structural Change. Cambridge University Press, 1998.