
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОИСКИ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

УДК 338, 519.87

РАСЧЕТ ОБЪЕМА ПРОИЗВОДСТВА И ЗАПАСОВ СЕЗОННОЙ ПРОДУКЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ СПРОСА С МИНИМАЛЬНЫМИ ОЖИДАЕМЫМИ ИЗДЕРЖКАМИ

**Заев В.А.¹, Логачев А.В.^{1,2,3}, Логачева О.М.^{1,2},
Хрущев С.Е.¹, Пудова М.В.¹**

¹ Новосибирский государственный университет
экономики и управления «НИНХ»,

² Сибирский государственный университет геосистем и технологий

³ Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

E-mail: avlogachov@mail.ru, omboldovskaya@mail.ru,
s.e.hrushchev@edu.nsuem.ru

В работе на основе методов математического моделирования рассматривается задача расчета объема производства и запасов продукции в условиях неопределенности спроса, обеспечивающих минимальные издержки, связанные с хранением нереализованной продукции и потерей неудовлетворенного спроса. Предложен критерий эффективности, минимизирующий математическое ожидание совокупных издержек, обоснована актуальность проблемы и сформулирована постановка оптимизационной задачи. Построена математическая модель, учитывающая стохастический характер спроса на продукцию, составлена методика решения задачи с различными комбинациями исходных условий. Приведен пример поиска оптимального решения с равномерной плотностью распределения спроса на продукцию.

Ключевые слова: математическое моделирование, оптимизация, плотность распределения, спрос, объемы производства и запасы продукции.

ESTIMATION OF THE PRODUCTION VOLUME AND INVENTORIES OF A SEASONAL PRODUCTS IN THE CONDITIONS OF UNCERTAINTY OF DEMAND WITH MINIMUM EXPECTED COSTS

**Zaev V.A.¹, Logachov A.V.^{1,2,3}, Logachova O.M.^{1,2},
Khrushchev S.E.¹, Pudova M.V.¹**

¹ Novosibirsk State University of Economics and Management

² Siberian State University of Geosystems and Technologies

³ Sobolev Institute of Mathematics

E-mail: avlogachov@mail.ru, omboldovskaya@mail.ru,
s.e.hrushchev@edu.nsuem.ru

In work on the basis of methods of mathematical modeling the problem of calculation of volume of production and stocks of production in the conditions of uncertainty of the demand, providing the minimal costs connected with storage of unrealized production

and loss of the unsatisfied demand is considered. A criterion of efficiency is proposed that minimizes the mathematical expectation of aggregate costs, the relevance of the problem is justified, and the formulation of the optimization problem is formulated. A mathematical model is constructed that takes into account the stochastic nature of demand for products, and a methodology for solving the problem with various combinations of the initial conditions is compiled. An example of the search for an optimal solution with a uniform density of the distribution of demand for products is given.

Keywords: mathematical modeling, optimization, distribution density, demand, production and stocks of products.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современных рыночных условиях задача планирования производства является одной из наиболее важных во всей системе управления предприятием [14]. Это обусловлено еще и тем, что в системе «производитель–потребитель» каждая из сторон руководствуется своими интересами, причем производитель, имея возможность полностью формировать ассортимент и объем продукции в той или иной степени находится в условиях свободы выбора потребителя [8–10, 12]. Поэтому предприятиям при планировании и управлении производством приходится учитывать множество различных факторов, многие из которых, по сути, являются случайными величинами. Что требует, к тому же, построения критериев проверки статистических гипотез [7, 11, 15].

В этом ряду стоит весьма важная задача планирования производства сезонной продукции, когда период спроса непродолжительный, объем спроса точно не определен и задается в виде некоторых интервалов или плотности распределения. При этом предприятие не в состоянии отреагировать в период реализации продукции на возникающие изменения на рынке и вынуждено делать определенные запасы на складе для обеспечения ожидаемого спроса. Примером такой продукции является школьная форменная одежда, когда основной объем продаж приходится на довольно короткий интервал времени, затем спрос резко падает до следующего периода.

Большинство работ, касающихся проблем организации и управления производством, посвящены технологии изготовления продукции, формированию ассортиментной политики, календарному планированию и не учитывают случайных факторов, которые могут оказывать существенное влияние на принятие управляющих решений [5, 6, 14].

В этом случае актуальными становятся вопросы оптимизации объемов производства и запасов продукции, оценки длительности производственного цикла в условиях неопределенности спроса.

2. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Задача оптимизации в этом случае может быть сформулирована следующим образом: при заданном запасе продукции на начале планового периода производства и плотности распределения спроса определить объем производства и запаса продукции, обеспечивающих минимальные финансовые издержки, связанные с хранением нереализованной продукции или потерей прибыли в связи с ее недопоставкой на рынок. В качестве крите-

рия эффективности целесообразно использовать математическое ожидание общих финансовых потерь. Не ограничивая общности, в дальнейшем для простоты под продукцией будем понимать ее стоимостной эквивалент и считать его непрерывной величиной.

В целях формализации задачи обозначим через y_0 – величину запаса продукции на начало планового периода, y_1 – переменную, определяющую объем произведенной в течение планового периода продукции, $p_x(s)$ – плотность распределения спроса, которая отлична от нуля только на отрезке $[a, b]$. При этом значения a и b определяют соответственно нижнюю и верхнюю границы спроса. Объем продукции, который может быть поставлен на свободный рынок, будет определяться значением

$$y = y_0 + y_1, \quad y_0 \leq y \leq b, \quad (1)$$

где y – объем поставляемой продукции на потребительский рынок.

В зависимости от объема поставляемой продукции и величины спроса возможны различные комбинации между этими величинами. В дальнейшем для определенности ограничимся рассмотрением случая, когда $y_0 \leq a$.

Разность между объемом поставленной на рынок продукцией и спросом будем рассматривать как случайную величину, определяющую при положительном значении объем нереализованной продукции, а при отрицательном – величину неудовлетворенного спроса

$$z = y - x, \quad a \leq x \leq b. \quad (2)$$

В соответствии с критерием эффективности задачи найдем математическое ожидание совокупных издержек. Учитывая монотонность величины z , значение плотности распределения $p_z(u)$ можно определить в соответствии с правилом замены переменных [2].

С учетом соотношения (2) получим

$$p_z(u) = \begin{cases} p_x(y - u), & \text{если } y - b < u < y - a, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3)$$

где $p_z(u)$ – плотность распределения случайной величины z .

Составим функцию возможных финансовых потерь, связанных как с издержками на хранение нереализованной продукции, так и с недопоставкой продукции на рынок и снижением ожидаемой прибыли от потери спроса

$$f(z) = \begin{cases} q_1 z, & 0 < z < y - a, \\ -q_2 z, & y - b < z < 0, \end{cases} \quad (4)$$

где q_1 – издержки, связанные с хранением единицы нереализованной продукции, q_2 – потери, обусловленные недопоставкой единицы продукции.

Тогда математическое ожидание финансовых потерь в зависимости от объема поставляемой продукции с использованием (3), (4) будет иметь вид

$$Ef(z) = q_1 \int_0^{y-a} u p_z(u) du - q_2 \int_{y-b}^0 u p_z(u) du. \quad (5)$$

Для удобства представления экстремальной задачи перейдем к исходным переменным. Тогда после некоторых простейших преобразований из (5) с учетом (2), (3) получим

$$Ef(y-x) = q_1 \int_a^y (y-s)p_x(s)ds + q_2 \int_y^b (s-y)p_x(s)ds, \quad (6)$$

где $Ef(y-x)$ – математическое ожидание потерь.

Кроме того, на величину затрат оказывают дополнительное влияние издержки, связанные с хранением продукции на начало планового периода, а также с объемом продукции, изготовленной в течение планового периода. Выразим длительность планового периода через объем произведенной продукции и мощность производства

$$t_0 = \frac{y - y_0}{W}, \quad (7)$$

где W – мощность производства, t_0 – длительность планового периода.

В этом случае финансовые затраты на хранение продукции можно определить выражением

$$Z = q_0 W \int_0^{t_0} (t_0 - t)dt, \quad (8)$$

где Z – издержки на хранение произведенной продукции, q_0 – издержки, связанные с хранением единицы продукции в течение планового периода, t – текущее время.

Учитывая, что общие издержки зависят от объема нереализованной продукции, потерей спроса в связи с недопоставкой продукции на рынок, а также финансовых затрат за счет хранения продукции в период ее изготовления, задача оптимизации издержек с использованием соотношений (6)–(8) сводится к отысканию минимального значения интегральной целевой функции

$$L(y) = \frac{q_0(y - y_0)^2}{2W} + Ef(y-x) \rightarrow \min \quad (9)$$

при удовлетворении ограничения

$$y_0 \leq y \leq b. \quad (10)$$

Система соотношений (9), (10) представляет собой задачу стохастического программирования, для реализации которой будем использовать условие Куна – Таккера [13].

Дифференцируя выражение (9) и приравнявая его к нулю, получим уравнение для нахождения критических точек

$$L'(y) = \frac{q_0(y - y_0)}{W} + q_1 \int_a^y p_x(s)ds - q_2 \int_y^b p_x(s)ds = 0, \quad y_0 \leq y \leq b. \quad (11)$$

Таким образом, наша задача свелась к нахождению минимального значения функции на отрезке. Если уравнение (11) не имеет решения в явном виде или не могут быть использованы соответствующие таблицы распре-

деления, задача может быть решена с применением численных методов [13] или методами оптимизации [3, 4].

Так как вторая производная функции $L(y)$ положительна, то если уравнение (11) имеет решение, это решение единственно и на нем достигается минимум.

Следует отметить, что плотность распределения $p_x(s)$ и объем поставляемой продукции y полностью определяют ожидаемый объем продаж, величину неудовлетворенного спроса, а также объем нереализованной продукции.

В частности, для определения математического ожидания объема продаж необходимо составить функцию случайного аргумента спроса, определяющую величину реализации продукции в зависимости от объема его поставки. В этом случае можно записать

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & a < x \leq y, \\ y, & y < x < b. \end{cases} \quad (12)$$

Математическое ожидание объема продаж продукции при указанной величине спроса с учетом (12) будет определяться соотношением

$$Ef(x, y) = \int_a^y sp_x(s)ds + y \int_y^b p_x(s)ds, \quad (13)$$

где $Ef(x, y)$ – ожидаемый объем продаж.

Аналогично могут быть рассчитаны математические ожидания объема нереализованной продукции, а также величины неудовлетворенного спроса. Величина объема производства продукции в плановый период будет определяться в соответствии с соотношением (1).

В качестве примера решения оптимизационной задачи рассмотрим, когда значение плотности $p_x(s)$ задано равномерным законом распределения

$$p_x(s) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)}, & s \in [a, b], \\ 0, & s \notin [a, b]. \end{cases} \quad (14)$$

В этом случае интегральное уравнение (11) с использованием (14) имеет аналитическое решение

$$y_* = \frac{(q_1 a + q_2 b)W + q_0 y_0 (b - a)}{q_0 (b - a) + W(q_1 + q_2)}, \quad (15)$$

где y_* – решение экстремальной задачи (9), (10).

Покажем, что $y_0 \leq y_* \leq b$ с учетом (15) и условия $y_0 \leq a < b$ получим

$$b - y_* = \frac{(b - a)(b q_0 - q_0 y_0 + W q_1)}{q_0 (b - a) + W(q_1 + q_2)} > 0, \quad (16)$$

$$y_0 - y_* = \frac{W q_1 (y_0 - a) + W q_2 (y_0 - b)}{q_0 (b - a) + W(q_1 + q_2)} < 0. \quad (17)$$

Из (16), (17) следует, что $y_0 \leq y_* \leq b$. Если $y_* \geq a$, то в соответствии с (13) математическое ожидание объема продаж будет определяться выражением $Ef(x, y) = \frac{y_* b - a^2}{b - a}$, фактический же объем продаж будет зависеть от тех или иных условий, которые могут возникнуть на рынке в процессе реализации продукции.

3. ВЫВОДЫ

1. Построена математическая модель (9), (10), которая позволяет оценить оптимизированный объем производства сезонной продукции в условиях неопределенности спроса с минимальными ожидаемыми издержками.

2. Значения q_0, q_1, q_2 могут быть использованы в качестве некоторых параметров варьирования, на изменение которых производитель может пойти при планировании объемов производства, и тем самым получить различные комбинации оптимальных значений для принятия управляющих решений.

3. Задача может быть распространена также и на несколько независимых потребителей продукции с заданными плотностями распределения спроса. В этом случае общая плотность распределения спроса может быть получена как свертка указанных плотностей.

4. Для продукции с разными ассортиментными группами решение экстремальной задачи целесообразно проводить по каждой группе продукции отдельно. В этом случае при расчете издержек на хранение запасов и длительности плановых периодов на изготовление продукции необходимо учитывать производственные мощности и технологические условия запуска продукции в производство.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Н. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2003.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
3. Быкадоров И.А., Гюрский Н.М. Введение в методы оптимизации. Ч. I. Основные понятия линейного программирования: учеб. пособие. Новосибирск: СКЦ, 1994. 65 с.
4. Быкадоров И.А. Введение в методы оптимизации. Ч. II. Математические основы линейного программирования: учеб. пособие. Новосибирск: СКЦ, 1995. 110 с.
5. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
6. Глинский В.В. Статистические методы поддержки управленческих решений: монография. Новосибирск: Изд-во НГУЭУ, 2008. 256 с.
7. Глинский В.В., Ионин В.Г. Статистический анализ: учеб. пособие / 3-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во ИНФРА-М; Новосибирск: Сибирское соглашение, 2002. 241 с.
8. Заев В.А., Ефименко Л.Л., Мокеева Н.С., Питалев В.С. Формирование оптимизированного модельного ряда спецодежды с учетом ценовых и эксплуатационных требований потребителей // Научное обозрение. Серия 1: Экономика и право. 2016. № 4. С. 112–117.

9. *Заев В.А., Катков Е.И., Кислых В.Н.* Интегральная оптимизированная оценка величины заемных и кредитных средств в долгосрочных инвестиционных проектах // Научное обозрение. Серия 1: Экономика и право. 2014. № 3. С. 41–46.
10. *Заев В.А., Катков Е.И., Кислых В.Н.* Модель оптимизации структуры капитала компании в условиях реализации инвестиционных проектов // Финансовая экономика. 2014. № 3. С. 7–10.
11. *Логачев А.В., Хрущев С.Е.* О проверке наличия структурных сдвигов в исследованиях временных рядов // Вестник НГУЭУ. 2017. № 2. С. 328–332.
12. *Мокеева Н.С., Заев В.А., Гутарова И.В., Торгашова Л.И., Фролова И.В.* Оптимизированная оценка величины серии швейных изделий с учетом длительности производственного цикла // Финансовая экономика. 2016. № 4. С. 47–52.
13. *Хуторецкий А.Б.* Модели исследования операций. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2006.
14. *Шепеленко Г.И.* Экономика, организация и планирование производства на предприятии: учеб. пособие для студ. экон. фак. и вузов / 3-е изд., доп. и перераб. Ростов н/Д: изд. центр «МарТ», 2002.
15. *Khrushchev S.E., Logachov A.V., Logachova O.M.* About one criterion of verifying the independence of observations // Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Methods in Cybernetics and System Analysis (AMSA2017). Proceedings of the International Workshop. 2017. P. 257–261.
16. *Glinskiy V., Serga L., Khvan M.* Environmental safety of the region: new approach to assessment // Procedia CIRP, 26 (2015). 30–34.

Bibliography

1. *Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.N.* Chislennyye metody. M.: BINOM. Lab. znaniy, 2003.
2. *Borovkov A.A.* Teorija veroyatnostej. M.: Jeditorial URSS, 1999.
3. *Bykadorov I.A., Gorskiy N.M.* Vvedenie v metody optimizacii. Ch. I. Osnovnye ponjatija linejnogo programmirovaniya: ucheb. posobie. Novosibirsk: SKC, 1994. 65 p.
4. *Bykadorov I.A.* Vvedenie v metody optimizacii. Ch. II. Matematicheskie osnovy linejnogo programmirovaniya: ucheb. posobie. Novosibirsk: SKC, 1995. 110 p.
5. *Vasil'ev F.P.* Metody optimizacii. M.: Faktorial Press, 2002.
6. *Glinskiy V.V.* Statisticheskie metody podderzhki upravlencheskih reshenij: monografiya. Novosibirsk: Izd-vo NGUJeU, 2008. 256 p.
7. *Glinskiy V.V., Ionin V.G.* Statisticheskij analiz: ucheb. Posobie / 3-e izd., pererab. i dop. M.: Izd-vo INFRA-M; Novosibirsk: Sibirskoe soglasenie, 2002. 241 p.
8. *Zaev V.A., Efimenko L.L., Mokeeva N.S., Pitalev V.S.* Formirovanie optimizirovannogo model'nogo rjada specodezhdy s uchetom cenovyh i jekspluatacionnyh trebovanij potrebitelej // Nauchnoe obozrenie. Seriya 1: Jekonomika i pravo. 2016. № 4. P. 112–117.
9. *Zaev V.A., Katkov E.I., Kislyh V.N.* Integral'naja optimizirovannaja ocenka velichiny zaemnyh i kreditnyh sredstv v dolgosrochnyh investicionnyh proektah // Nauchnoe obozrenie. Seriya 1: Jekonomika i pravo. 2014. № 3. P. 41–46.
10. *Zaev V.A., Katkov E.I., Kislyh V.N.* Model' optimizacii struktury kapitala kompanii v uslovijah realizacii investicionnyh proektov // Finansovaja jekonomika. 2014. № 3. P. 7–10.
11. *Logachjov A.V., Hrushhev S.E.* O proverke nalichija strukturnyh sdvigov v issledovaniyah vremennyh rjadov // Vestnik NGUJeU. 2017. № 2. P. 328–332.
12. *Mokeeva N.S., Zaev V.A., Gutarova I.V., Torgashova L.I., Frolova I.V.* Optimizirovannaja ocenka velichiny serii shvejnyh izdelij s uchetom dlitel'nosti proizvodstvennogo cikla // Finansovaja jekonomika. 2016. № 4. P. 47–52.
13. *Hutoreckij A.B.* Modeli issledovaniya operacij. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2006.

14. *Shepelenko G.I.* Jekonomika, organizacija i planirovanie proizvodstva na predprijatii: ucheb. posobie dlja stud. jekon. fak. i vuzov / 3-e izd., dop. i pererab. Rostov n/D: izd. centr «MarT», 2002.
15. *Khrushchev S.E., Logachov A.V., Logachova O.M.* About one criterion of verifying the independence of observations // Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Methods in Cybernetics and System Analysis (AMSA2017). Proceedings of the International Workshop. 2017. P. 257–261.
16. *Glinskiy V., Serga L., Khvan M.* Environmental safety of the region: new approach to assessment // Procedia CIRP, 26 (2015). 30–34.