

Вестник НГУЭУ. 2022. № 1. С. 211–223
Vestnik NSUEM. 2022. No. 1. P. 211–223

Научная статья

УДК 330.45

DOI: 10.34020/2073-6495-2022-1-211-223

ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ НА ОСНОВЕ НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА И РЕКУРРЕНТНОГО МЕТОДА

Ганичева Антонина Валериановна¹, Ганичев Алексей Валерианович²

¹ *Тверская государственная сельскохозяйственная академия*

² *Тверской государственный технический университет*

¹ TGAN55@yandex.ru

² alexej.ganichev@yandex.ru

Аннотация. В статье разработан новый метод построения доверительных интервалов. Используется формула, полученная на основе неравенства Чебышева, которая в случае неизвестной дисперсии применяется в рекуррентном методе. Предложен новый метод описания прямой и обратной функций Лапласа. Разработанные методы могут применяться не только для нормального распределения, но и для любого другого, а также в случае, когда вид закона распределения случайной величины неизвестен. Практическая реализация показана на конкретном примере вычисления доверительного интервала для балла учащегося, полученного по результатам тестирования.

Ключевые слова: выборка, точность, надежность оценки, объем репрезентативности, функция погрешности, функция Лапласа

Для цитирования: Ганичева А.В., Ганичев А.В. Построение доверительных интервалов на основе неравенства Чебышева и рекуррентного метода // Вестник НГУЭУ. 2022. № 1. С. 211–223. DOI: 10.34020/2073-6495-2022-1-211-223.

Original article

CONSTRUCTION OF CONFIDENCE INTERVALS BASED ON CHEBYSHEV'S INEQUALITY AND RECURRENT METHOD

Ganicheva Antonina V.¹, Ganichev Aleksey V.²

¹ *Tver State Agricultural Academy*

² *Tver State Technical University*

¹ TGAN55@yandex.ru

² alexej.ganichev@yandex.ru

Abstract. The article presents a new method for constructing confidence intervals. A formula obtained on the basis of Chebyshev's inequality is used, it is applied in the recurrent method in the case of unknown variance. A new method for describing the direct and inverse Laplace functions is proposed. The developed methods can be used not only

© Ганичева А.В., Ганичев А.В., 2022

for normal distribution, but also for any other, as well as in the case when the type of distribution law of a random variable is unknown. The practical implementation is shown by a concrete example of calculating the confidence interval for the student's score obtained from the test results.

Keywords: sampling, accuracy, reliability of estimation, volume of representativeness, error function, Laplace function

For citation: Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Construction of confidence intervals based on Chebyshev's inequality and recurrent method. *Vestnik NSUEM*. 2022; (1): 211–223. (In Russ.). DOI: 10.34020/2073-6495-2022-1-211-223.

Введение

Несмотря на то, что методы построения доверительных интервалов разработаны достаточно давно, эта проблема остается по-прежнему важной и актуальной. О важности данной проблемы свидетельствует наличие ГОСТов по статистическим методам определения доверительных, толерантных, предикционных интервалов. Актуальность проблемы подтверждается многочисленными современными научными публикациями в России и за рубежом.

Основными направлениями современных исследований методов построения доверительных интервалов являются:

- построение доверительных интервалов не только для нормального закона распределения, но и для других видов распределений, например, дискретных [19], биномиального [15], бета [8], гипергеометрического [5], экспоненциального [10] и т.д., а также композиции законов распределения [7];

- определение интервальных оценок не только для математических ожиданий, дисперсий, средних квадратических отклонений, но и для медианы [9], частот и долей [3] условных вероятностей [6], параметров положения и масштаба распределений [11];

- разработка многочисленных практических приложений интервальных оценок в биологии и медицине [16, 17], экологии [18], образовании [4] и других областях.

Важными вопросами использования статистических методов являются минимизация объема репрезентативности – числа наблюдений, необходимых для получения интервальных оценок заданного качества (точности и надежности) [1], определение оптимального сочетания доверительного интервала и доверительной вероятности [13], использование неравенства Чебышева [2, 14] и рекуррентных способов построения доверительных интервалов [12].

Цель данной работы – разработка метода для оценки объема репрезентативности на основе неравенства Чебышева и рекуррентных соотношений. Для реализации поставленной цели решены следующие задачи:

- 1) разработан новый метод описания функции Лапласа и обратной к ней, на основе этого показан новый метод построения доверительного интервала для математического ожидания нормального закона распределения (ЗР) случайной величины при известной и неизвестной дисперсии;

2) данный метод распространен для задачи построения доверительного интервала и оценки объема репрезентативности для любого ЗР при известной и неизвестной дисперсии;

3) приведен алгоритм реализации разработанного метода.

1. Метод построения доверительного интервала для математического ожидания случайной величины при известной дисперсии с использованием неравенства Чебышева

Пусть $\bar{X}$ – случайная величина, имеющая произвольный закон распределения, m_x и D_x – ее математическое ожидание и дисперсия соответственно. Над этой случайной величиной производится n опытов, $x_1, \dots, x_n$ – соответствующая выборка, причем до опытов каждая x_i рассматривается как случайная величина $X_i \left(i = \overline{1, n} \right)$ с математическим ожиданием m_x и D_x . Будем считать $X_1, \dots, X_n$ независимыми случайными величинами. Пусть

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Из неравенства Чебышева следует, что

$$\beta = P(|m_x - \bar{x}| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D[\bar{x}]}{\varepsilon^2}, \quad \beta \geq 1 - \frac{D_x}{n\varepsilon^2}, \quad -n \geq -\frac{D_x}{\varepsilon^2\alpha}, \quad (1)$$

где $\alpha = 1 - \beta$, β – надежность, ε – точность интервальной оценки.

Потребуем, чтобы $\alpha_1 \geq \frac{D_x}{n\varepsilon^2}$, где α_1 – число, удовлетворяющее условию $\alpha < \alpha_1 < 1$. Оценка α_1 будет получена позже. Тогда

$$n \geq \frac{D_x}{\varepsilon^2\alpha_1}, \quad (2)$$

$$bn \geq b \frac{D_x}{\varepsilon^2\alpha_1}, \quad (3)$$

где b – действительное число, такое, что $b\alpha > \alpha_1$, т.е. $b > 1$. Оценка b будет определена в дальнейшем.

Из (1) и (3) получаем

$$n(b-1) \geq \frac{D_x}{\varepsilon^2} \left(\frac{b}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha} \right). \quad (4)$$

Из (4) следует, что

$$n \geq \frac{1}{(b-1)} \frac{D_x}{\varepsilon^2} \left(\frac{b}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha} \right) = n_0. \quad (5)$$

Вычислим производную $n'_{0_b} = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha\alpha} \frac{1}{(b-1)^2} \frac{D_x}{\varepsilon^2}$, т.е. $n_0 > 0$ и n_0 – возрастающая функция относительно b , при этом $n_0 = 0$, когда $b = \frac{\alpha_1}{\alpha}$, т.е. если $n_0 > 0$, то $b = \frac{\alpha_1}{\alpha}$ и наоборот.

Предположим, что для данных D_x , ε , α объем репрезентативности, определяемый для построения доверительного интервала с точностью ε и надежностью $1 - \alpha = \beta$, известен и равен $n_1 + 1$. Представим n_1 в виде

$$n_1 = \frac{D_x}{\varepsilon^2} t^2. \quad (6)$$

Пусть α_1, t и t_1 удовлетворяют условию

$$\frac{1}{\alpha} > t > \frac{1}{\alpha_1} > t_1. \quad (7)$$

Тогда $\frac{1}{\alpha} > t_1$.

Требуем, чтобы выполнялось условие

$$\frac{D_x}{\varepsilon^2} t_1 < n_0 < \frac{D_x}{\varepsilon^2} t,$$

т.е.

$$t_1 < \frac{1}{b-1} \left(\frac{b}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha} \right) < t. \quad (8)$$

Обозначим через y выражение

$$\frac{1}{b-1} \left(\frac{b}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha} \right). \quad (9)$$

С учетом (7) неравенство (8) преобразуется к виду (с учетом левой части):

$$b_0 = \frac{\alpha_1(1 - \alpha t_1)}{\alpha(1 - \alpha_1 t_1)} < b. \quad (10)$$

Правая часть неравенства (8) представляет собой верное неравенство для любого $b > 0$, так как $\frac{1}{\alpha_1} < t < \frac{1}{\alpha}$.

Очевидно, левая часть (10) больше, чем $\frac{\alpha_1}{\alpha}$, и является возрастающей функцией относительно t_1 , т.е. чем больше t_1 , тем больше b и больше n_0 , тогда n_0 будет приближаться слева к объему репрезентативности n_1 . Поэтому t_1 должно быть близко к $\frac{1}{\alpha_1}$, но меньше его.

Не нарушая общности, рассмотрим пример нормального распределения.

Предположим, что точность вычислений задана до 0,0001 долей. Тогда промежуточные вычисления округляются до 0,00001. Например, если $\beta = 0,8890$ и $\alpha = 0,1010$, $\varepsilon = 0,1$; $D_x = 1$; $n^1 = 269$, то $t = 2,68960$ и $\frac{1}{t} = 0,37180$. Отсюда $\alpha_1 > 0,3718$. Будем считать, что α_1 отличается от $\frac{1}{t}$ на 0,0001. Точ-

ность вычислений рассматривается до 0,0001. Поэтому в качестве значения α_1 можно взять число 0,3719. Тогда, согласно (7), $t_1 < \frac{1}{\alpha_1} = 2,68889$. В каче-

стве t_1 можно взять значение 2,68879, т.е. на 0,0001 меньше, чем $\frac{1}{\alpha_1}$. При этих данных из (10) получаем $b_0 = 68774,59177$.

Таким образом, при $b = b_0 + 0,0001 = 68774,59187$ выражение $y = \frac{1}{b-1} \left(\frac{b}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha} \right) = 2,6888$ будет отличаться от t на величину 0,0008. При этом $n_0 = \left\lfloor \frac{D_x}{\varepsilon^2} 2,6888 \right\rfloor + 1$, здесь знак $\lfloor \cdot \rfloor$ означает целую часть числа. Объем репрезентативности $n_1 + 1 = \frac{D_x}{\varepsilon^2} 2,6896 + 1$. Относительная погрешность замены t на y и n_1 на n_0 составляет 0,029 %.

В общем виде пусть α , α_1 , t и t_1 удовлетворяют (6)–(8). Обозначим через o число 0,0001. Положим $\alpha_1 = \frac{1}{t} + o$, $t_1 = \frac{1}{\alpha_1} - o$, т.е. $t_1 = \frac{1}{1/t + o} - o$. Тогда приближенно можно считать, что $\frac{\alpha}{t} \cdot o + \alpha \cdot o^2 \approx \frac{\alpha}{t} \cdot o$, и после преобразований получаем

$$b_0 = \frac{1 + to - t\alpha + \alpha o}{\alpha o}.$$

Отсюда $b - 1 = b_0 + o - 1 = \frac{1 + to - t\alpha}{\alpha o}$.

Положим $y = \frac{1}{b-1} \left(\frac{b}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha} \right)$. Тогда $y = \frac{t + t^2 o - t^2 \alpha + t \alpha o - o}{1 + 2to + t^2 o^2 - t\alpha - t^2 \alpha o}$.

Допустим, $t - y = \Delta$. Отсюда получаем выражение для Δ :

$$\Delta = \frac{t^3 o^2 - t^3 \alpha o + t^2 o - t \alpha o + o}{1 + 2to + t^2 o^2 - t\alpha - t^2 \alpha o}. \quad (11)$$

При этом t является функцией α .

Смысл Δ : это погрешность в определении множителя t объема репрезентативности $\frac{D_x}{\varepsilon^2} t$.

Из (11) получаем уравнение для t :

$$t^3 o(1 - \alpha) + t^2 o(1 - \Delta + \alpha \Delta) + t(\alpha \Delta - \alpha o - 2o\Delta) + o - \Delta = 0. \quad (12)$$

Принимая значения α из промежутка $[\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}]$ для заданной таблично или функционально зависимости $\Delta = \Delta(\alpha)$, находим соответствующее зна-

чение Δ и t из уравнения (12). Умножая найденное t на заданное выражение $\frac{D_x}{\varepsilon^2}$, получаем приближенно с точностью $\Delta(\alpha)$ соответствующий объем репрезентативности $\left\lfloor \frac{D_x}{\varepsilon^2} t \right\rfloor + 1$, здесь $\lfloor x \rfloor$ означает целую часть числа x .

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Для данных надежности $\alpha \in [\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}]$, точности ε , дисперсии D_x и уравнения погрешности $\Delta = \Delta(\alpha)$ при выполнении (7) объем репрезентативности для любого закона распределения равен приближенно $\left\lfloor \frac{D_x}{\varepsilon^2} t \right\rfloor + 1$, где t находится из уравнения (12) с заданной погрешностью $\Delta(\alpha)$.

Известно, что при данных D_x и ε , чем меньше α , тем больше объем репрезентативности, а поэтому больше t . Следовательно, t и Δ являются убывающими функциями от α .

Функция Δ задается, исходя из накопленного опыта оценки погрешностей в отыскании объема репрезентативности, из целесообразности той или иной оценки.

Например, $\Delta = \delta/\alpha$, где $\delta - \text{const}$ ($\delta > 0$) на участке задания α . В общем случае Δ – это убывающая функция. Как будет показано далее, для нормального распределения Δ изменяется по убывающей экспоненте. Значение Δ может быть задано минимум в семи точках для достаточно точного описания ее уравнения регрессии. Может быть задана не Δ , а объем репрезентативности в семи точках. Тогда объем делится на $\frac{D_x}{\varepsilon^2}$ – находится t . Затем по заданной вероятности α и найденному значению t по формуле (11) находится Δ .

Рассмотрим аппроксимацию Δ по прямой линии. Здесь возможны два варианта: для данных $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ заданы соответствующие значения $\Delta^{(1)}$ и $\Delta^{(2)}$ и второй вариант – эти значения не заданы, но заданы объемы репрезентативности $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$. Не нарушая общности, рассмотрим второй вариант.

Пусть $\alpha^{(1)} = 0,05$; $\alpha^{(2)} = 0,4$. Большие значения α не имеет смысла брать, так как в этом случае надо переходить к противоположному событию и вместо α рассматривать $\beta = 1 - \alpha$. Допустим, что для $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ известны объемы репрезентативности $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$, причем $n^{(1)} > n^{(2)}$ (при заданных D_x и ε). Поделим $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$ на $\frac{D_x}{\varepsilon^2}$, получим значения $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$ соответственно, при этом $t^{(1)} > t^{(2)}$. Из формулы (11) находим $\Delta^{(1)} = \Delta(\alpha^{(1)})$, $\Delta^{(2)} = \Delta(\alpha^{(2)})$.

Рассмотрим, для примера, линейную зависимость Δ от α и запишем уравнение прямой линии, проходящей через точки $(\alpha^{(1)}, \Delta_1)$, $(\alpha^{(2)}, \Delta_2)$:

$$\frac{\Delta(\alpha) - \Delta^{(1)}}{\alpha - \alpha^{(1)}} = \frac{\Delta^{(2)} - \Delta^{(1)}}{\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}}. \quad (13)$$

Отсюда находим

$$\Delta(\alpha) = \Delta^{(1)} + \frac{(\Delta^{(2)} - \Delta^{(1)})(\alpha - \alpha^{(1)})}{\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}}. \quad (14)$$

Заметим, что если погрешность Δ задана по семи и более точкам, то объем репрезентативности будет не менее 7. Если Δ задана непрерывной функцией, например, исходя из предыдущей практики описания подобных событий или ситуаций, то в этом случае объем репрезентативности может быть любым, в том числе принимать значения 1, 2, 3 и т.п.

2. Новый метод описания прямой и обратной функции Лапласа

Для нормального закона распределения функция $u = \sqrt{t}$ с погрешностью $\Delta(\alpha)$ описывает обратную функцию Лапласа. Погрешность находится из уравнения (15):

$$\Delta = 0,0012e^{-0,063\alpha}, \quad (15)$$

представляющего собой эконометрическую модель, построенную по 12 значениям α и Δ согласно табл. 1 с точностью $R^2 = 0,9609$. График зависимости Δ от α показан на рис. 1.

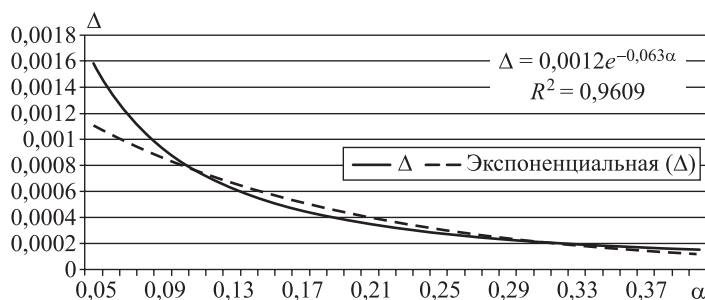


Рис. 1. График зависимости Δ от α
Graph of dependence Δ from α

Из (12) находим α :

$$\alpha = \frac{t^3 o + t^2 o - t^2 o \Delta - 2to\Delta + o - \Delta}{t^3 o - t^2 o \Delta - t\Delta + to}. \quad (16)$$

Данная зависимость с погрешностью Δ описывает функцию Лапласа. График зависимости Δ от t представлен на рис. 2.

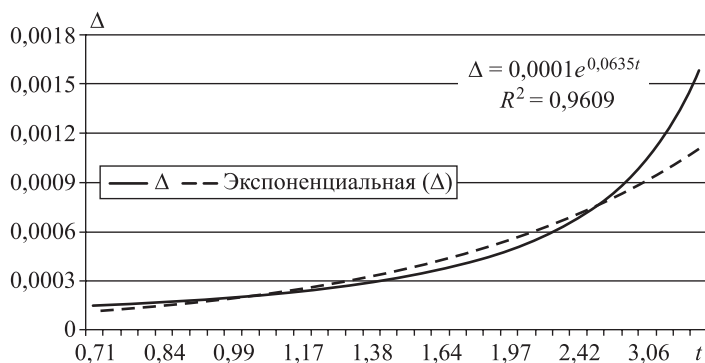


Рис. 2. График зависимости Δ от t
Graph of dependence Δ from t

Итак, имеем следующее утверждение.

Теорема 2. С погрешностью $\Delta(t)$ функция Лапласа выражается из уравнения (16) при заданных значениях $o = 0,0001$ и $t = u^2$, где u – заданная обратная функция Лапласа.

С погрешностью $\Delta(t)$ из уравнения (12) находится $t = u^2$ при заданным $o = 0,0001$ и α .

Предложенное описание отличается достаточной обозримостью, по сравнению с таблицами Лапласа и представлением функции Лапласа посредством интегрирования рядов. Кроме того, такое представление вероятностной и обратной к ней функции отличается универсальностью и пригодно для любого распределения, в том числе когда закон неизвестен.

Таким образом, функция Лапласа и обратная к ней являются частным случаем множества функций, отличающихся заданной погрешностью Δ (при одних и тех же точности ε и дисперсии D_x).

3. Построение доверительного интервала для математического ожидания случайной величины при неизвестной дисперсии

Теперь рассмотрим случай построения доверительного интервала при неизвестной D_x случайной величины. Тогда для D_x рассматривается ее точечная оценка $S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Пусть надежность такой замены равна ε_1 , т.е.

$$|D_x - S_x^2| < \varepsilon_1. \quad (17)$$

Для проверки выполнения неравенства

$$\left\lfloor \frac{S_x^2 - \varepsilon_1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1 \leq n_0 \leq \left\lfloor \frac{S_x^2 + \varepsilon_1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1 \quad (18)$$

организуется рекуррентная процедура. Сначала полагаем $n = n_0 = 2$. Проверяем неравенство при числе испытаний n_0 . Если неравенство выполняется, то объем репрезентативности равен n_0 , в противном случае полагаем $n_0 = n_0 + 1$ и добавляем из генеральной совокупности еще один элемент, который выбирается случайным образом. И весь процесс повторяется, т.е. используется рекуррентный метод.

Приведем алгоритм решения задач данного типа.

Исходные данные: ε , S_x^2 , α , $n_0 = 2$, $\Delta = \Delta(\alpha)$.

1. Проводим n_0 испытаний.

2. Находим соответствующие значения $\bar{x}$ и S_x^2 .

3. Находим t из уравнения (12).

4. Находим значения $I_n = \left\lfloor \frac{S_x^2 - \varepsilon_1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$ и $I_n = \left\lfloor \frac{S_x^2 + \varepsilon_1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$.

5. Сравниваем полученные значения с n_0 . Если неравенство (18) не выполняется, то полагаем $n_0 = n_0 + 1$ и переходим на шаг 1 алгоритма (т.е. проводим еще одно испытание). Если неравенство выполняется, то объем репрезентативности с погрешностью Δ равен найденному значению n_0 .

Алгоритм решения задач данного типа рассмотрим в части практической реализации на конкретном примере.

4. Пример расчетов

В качестве практической реализации рассмотрим пример определения объема репрезентативности для любого распределения при неизвестной дисперсии.

Допустим, речь идет о балле учащегося по тестированию, когда балл за каждое задание изменяется от 0 до 10. Баллы учащегося по тестированию приведены в табл. 1. Надо определить минимальное количество заданий (объем репрезентативности), при котором средний балл выборки будет отличаться от истинного среднего балла не более, чем на ϵ с надежностью α .

Таблица 1

Балл учащегося по тестированию
Student score on testing

4	3	5	6	5	7	6	7	5	8	9	6	5	5	4	7	4	8	6	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Пусть заданы значения: $\epsilon = 0,5$; $\epsilon_1 = 0,5$; $\alpha = 0,1$; $n = 20$, $n_0 = 2$, $o = 0,001$, функция погрешности $\Delta = 0,001/\alpha$.

Алгоритм заключается в следующем.

1. Первоначально $n_0 = 2$. Из опыта определяем баллы за первое и второе задания: x_1 и x_2 . Пусть, например, $x_1 = 4$ и $x_2 = 3$.

2. Находим $\bar{x} = 3,5$ и $S_x^2 = 0,5$.

3. Находим $S_x^2 - \epsilon_1 = 0,5 - 0,5 = 0$ и $S_x^2 + 0,01 = 1$.

4. Из (12) находим t при $\Delta = 0,01$. Получаем 1,7180.

5. Вычисляем:

$$I_{\text{л}} = \left\lfloor \frac{S_x^2 - \epsilon_1}{\epsilon^2} t \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{0,5 - 0,5}{0,25} 1,718 \right\rfloor + 1 = 1,$$

$$I_{\text{п}} = \left\lfloor \frac{S_x^2 + \epsilon_1}{\epsilon^2} t \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{0,5 + 0,01}{0,25} 1,718 \right\rfloor + 1 = 7.$$

6. Проверяем выполнение неравенства (18). Оно не выполняется, полагаем $n_0 = n_0 + 1 = 3$ и переходим на шаг 1 алгоритма.

Порядок вычислений приведен в табл. 2.

Таблица 2

Порядок вычислений
Calculation Order

n_0	x	S_x^2	$\bar{x}$	$S_x^2 + \varepsilon_1$	$S_x^2 - \varepsilon_1$	$(S_x^2 + \varepsilon_1)/\varepsilon^2$	$(S_x^2 - \varepsilon_1)/\varepsilon^2$	I_n	I_d
1	4								
2	3	0,5000	3,5000	1,0000	0,0000	4,0000	0,0000	7	1
3	5	1,0000	4,0000	1,5000	0,5000	6,0000	2,0000	11	4
4	6	1,6667	4,5000	2,1667	1,1667	8,6667	4,6667	15	9
5	5	1,3000	4,6000	1,8000	0,8000	7,2000	3,2000	13	6
6	7	2,0000	5,0000	2,5000	1,5000	10,0000	6,0000	18	11
7	6	1,8095	5,1429	2,3095	1,3095	9,2381	5,2381	16	9
8	7	1,9821	5,3750	2,4821	1,4821	9,9286	5,9286	18	11
9	5	1,7500	5,3333	2,2500	1,2500	9,0000	5,0000	16	9
10	8	2,2667	5,6000	2,7667	1,7667	11,0667	7,0667	20	13

Для рассмотренного примера неравенство (18) выполняется при $n_0 = 9$.

Заключение

Дальнейшим развитием разработанного в статье метода является его развитие для моды, медианы и других параметров законов распределения, а также построение интервальных оценок для нечетких данных.

Разработанный авторами метод может применяться в социально-экономических, военных, технических, медицинских, экологических, биологических и других системах, а также при решении задач квалиметрии, метрологии, стандартизации и сертификации продукции.

Список источников

1. Белицкий В.И., Соколов С.М., Шерстюк А.В. Минимизация объема выборки измерений постоянной величины // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. 2014. № 644. С. 7–21.

2. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Метод построения доверительного интервала для дисперсии случайной величины // Вестник НГУЭУ. 2021. № 3. С. 146–155.

3. Гржибовский А.М. Доверительные интервалы для частот и долей // Экология человека. 2008. № 5. С. 57–60.

4. Гуменникова Ю.В., Рябинова Е.Н., Черницына Р.Н. Статистическая обработка результатов тестирования студентов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Психолого-педагогические науки. 2015. № 3 (27). С. 78–87.

5. Иванов М.А., Луценко М.М. Минимаксные доверительные интервалы для параметра гипергеометрического распределения // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. С. 68–76.

6. Кан Ю.С., Соболев В.Р. Асимптотический доверительный интервал для условной вероятности при принятии решений // Автоматика и телемеханика. 2017. № 10. С. 130–138.

7. Крейдик Е.Л. Методика расчета доверительного интервала оценки случайной величины, подчиненной композиции нормального и равномерного законов распределения // Доклады БГУИР. 2017. № 7 (109). С. 25–31.

8. *Кривенцов А.С., Ульянов М.В.* Интервальная оценка параметров бета-распределения при определении доверительной трудоемкости алгоритмов // *Известия ЮФУ*. 2012. № 7 (132). С. 210–219.
9. *Попов А.М.* Построение доверительного интервала для медианы распределения непрерывного типа // *Системный анализ и аналитика*. 2017. № 1 (2). С. 29–37.
10. *Приходько С.Б., Макарова Л.Н.* Определение доверительного интервала точечной оценки параметра экспоненциального распределения // *Проблеми інформаційних технологій*. 2012. № 2 (012). С. 84–87.
11. *Радионова М.В.* Построение оптимальных доверительных интервалов для параметров положения и масштаба распределений // *Актуальные вопросы современной науки*. 2010. № 11. С. 7–31.
12. *Светлаков А.А., Свинолупов Ю.Г., Шумаков Е.В.* Рекуррентный способ построения доверительных интервалов оценивания неизвестных значений измеряемых величин // *Приборы*. 2006. № 6. С. 54–59.
13. *Симанков В.С., Бучацкая В.В., Теплоухов С.В.* Определение оптимального сочетания доверительного интервала и доверительной вероятности // *Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки*. 2019. № 3 (246). С. 69–74.
14. *Суворова А.В., Пащенко А.Е., Тулупьева Т.В., Тулупьев А.Л.* Построение доверительных интервалов оценок интенсивности рискованного поведения на основе неравенства Чебышева // *Труды СПИИРАН*. 2009. № 10. С. 96–109.
15. *Трегубов Р.Б., Стремоухов М.В.* Задача оценивания параметра биномиального распределения по ограниченному числу опытов // *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2015. № 2 (163). С. 93–106.
16. *Ярмamedов Д.М., Лунатов В.А.* Метод доверительных интервалов в биологических и медицинских исследованиях // *Innova*. 2016. № 3 (4). С. 13–15.
17. Bonett D.G. Robust Confidence Interval for a Ratio of Standard Deviations // *Applied Psychological Measurement*. 2006. Vol. 30, no. 5. Pp. 432–439.
18. *Di Stefano J.* A confidence interval approach to data analysis // *Forest Ecology and Management*. 2004. Vol. 187, no. 2-3. Pp. 173–183.
19. *Henderson M., Meyer M.C.* Exploring the Confidence Interval for a Binomial Parameter in a First Course in Statistical Computing // *American Statistician*. 2001. Vol. 55, no. 4. Pp. 337–344.

References

1. Belickij V.I., Sokolov S.M., Sherstjuk A.V. Minimizacija ob#ema vyborki izmerenij postojannoju velichiny [Minimization of the sample size of measurements of constant magnitude], *Trudy Voenno-kosmicheskoy akademii im. A.F. Mozhajskogo* [Proceedings of the Military Space Academy named after A.F. Mozhaisky], 2014, no. 644, pp. 7–21.
2. Ganicheva A.V., Ganichev A.V. Metod postroenija doveritel'nogo intervala dlja dispersii sluchajnoj velichiny [Method of constructing a confidence interval for the variance of a random variable], *Vestnik NGUJeU* [*Vestnik NSUEM*], 2021, no. 3, pp. 146–155.
3. Grzhibovskij A.M. Doveritel'nye intervaly dlja chastot i dolej [Confidence intervals for frequencies and fractions], *Jekologija cheloveka* [*Human ecology*], 2008, no. 5, pp. 57–60.
4. Gumennikova Ju.V., Rjabinova E.N., Chernicyna R.N. Statisticheskaja obrabotka rezul'tatov testirovaniya studentov [Statistical processing of student testing results], *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta* [*Vestnik of Samara State Technical University*]. *Seriya: Psihologo-pedagogičeskie nauki* [*Series: Psychological and pedagogical sciences*], 2015, no. 3 (27), pp. 78–87.

5. Ivanov M.A., Lucenko M.M. Minimaksnye doveritel'nye intervaly dlja parametra gipergeometricheskogo raspredelenija [Minimax confidence intervals for the hypergeometric distribution parameter], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 2000, no. 7, pp. 68–76.
6. Kan Ju.S., Sobol' V.R. Asimptoticheskij doveritel'nyj interval dlja uslovnoj verojatnosti pri prinjatii reshenij [Asymptotic confidence interval for conditional probability in decision-making], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 2017, no. 10, pp. 130–138.
7. Krejdik E.L. Metodika rascheta doveritel'nogo intervala ocenki sluchajnoj velichiny, podchinennoj kompozicii normal'nogo i ravnomernogo zakonov raspredelenija [Method of calculating the confidence interval of estimating a random variable subordinate to the composition of normal and uniform distribution laws], *Doklady BGUIR* [Reports of the University], 2017, no. 7 (109), pp. 25–31.
8. Krivencov A.S., Ul'janov M.V. Interval'naja ocenka parametrov beta-raspredelenija pri opredelenii doveritel'noj trudoemkosti algoritmov [Interval estimation of parameters of the beta distribution in the determination of the confidence of the complexity of algorithms], *Izvestija JuFU* [Izvestiya SFU], 2012, no. 7 (132), pp. 210–219.
9. Popov A.M. Postroenie doveritel'nogo intervala dlja mediany raspredelenija nepreryvnogo tipa [Construction of the confidence interval for the median of the distribution of the continuous type], *Sistemnyj analiz i analitika* [System analysis and Analytics], 2017, no. 1 (2), pp. 29–37.
10. Prihod'ko S.B., Makarova L.N. Opredelenie doveritel'nogo intervala tochechnoj ocenki parametra jeksponencial'nogo raspredelenija [Determination of the confidence interval of the point estimation of the exponential distribution parameter], *Problemi informacijnih tehnologij* [Problems of information technologies], 2012, no. 2 (012), pp. 84–87.
11. Radionova M.V. Postroenie optimal'nyh doveritel'nyh intervalov dlja parametrov polozhenija i masshtaba raspredelenij [Construction of optimal confidence intervals for the parameters of the position and scale of distributions], *Aktual'nye voprosy sovremennyj nauki* [Actual issues of modern science], 2010, no. 11, pp. 7–31.
12. Svetlakov A.A., Svinolupov Ju.G., Shumakov E.V. Rekurrentnyj sposob postroenija doveritel'nyh intervalov ocenivaniya neizvestnyh znachenij izmerjaemyh velichin [Recurrent method of constructing confidence intervals for estimating unknown values of measured quantities], *Pribory* [Instruments], 2006, no. 6, pp. 54–59.
13. Simankov V.S., Buchackaja V.V., Teplouhov S.V. Opredelenie optimal'nogo sochetaniya doveritel'nogo intervala i doveritel'noj verojatnosti [Determination of the optimal combination of confidence interval and confidence probability], *Vestnik Adygejskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of the Adygea State University]. *Seriya 4: Estestvenno-matematicheskie i tehniczeskie nauki* [Series 4: Natural-mathematical and technical sciences], 2019, no. 3 (246), pp. 69–74.
14. Suvorova A.V., Pashhenko A.E., Tulup'eva T.V., Tulup'ev A.L. Postroenie doveritel'nyh intervalov ocenok intensivnosti riskovannogo povedenija na osnove neravenstva Chebysheva [Construction of confidence intervals for assessing the intensity of risky behavior based on Chebyshev inequality], *Trudy SPIIRAN* [Proceedings of SPIIRAN], 2009, no. 10, pp. 96–109.
15. Tregubov R.B., Stremouhov M.V. Zadacha ocenivaniya parametra binomial'nogo raspredelenija po ogranichenному chislu opytov [The problem of estimating the binomial distribution parameter for a limited number of experiments], *Izvestija JuFU. Tehniceskie nauki* [Izvestiya SFU. Technical sciences], 2015, no. 2 (163), pp. 93–106.
16. Jarmamedov D.M., Lipatov V.A. Metod doveritel'nyh intervalov v biologicheskikh i medicinskih issledovanijah [Method of confidence intervals in biological and medical research], *Innova* [Innova], 2016, no. 3 (4), pp. 13–15.

17. Bonett D.G. Robust Confidence Interval for a Ratio of Standard Deviations. *Applied Psychological Measurement*, 2006, vol. 30, no. 5, pp. 432–439.
18. Di Stefano J. A confidence interval approach to data analysis. *Forest Ecology and Management*, 2004, vol. 187, no. 2-3, pp. 173–183.
19. Henderson M., Meyer M.C. Exploring the Confidence Interval for a Binomial Parameter in a First Course in Statistical Computing. *American Statistician*, 2001, vol. 55, no. 4, pp. 337–344.

Сведения об авторах:

А.В. Ганичева – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра физико-математических дисциплин и информационных технологий, Тверская государственная сельскохозяйственная академия, Тверь, Российская Федерация.

А.В. Ганичев – доцент, кафедра информатики и прикладной математики, Тверской государственный технический университет, Тверь, Российская Федерация.

Information about the authors:

A.V. Ganicheva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Physical and Mathematical Disciplines and Information Technologies, Tver State Agricultural Academy, Tver, Russian Federation.

A.V. Ganichev – Associate Professor, Department of Informatics and Applied Mathematics, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию	14.11.2021	The article was submitted	14.11.2021
Одобрена после рецензирования	10.12.2021	Approved after reviewing	10.12.2021
Принята к публикации	08.01.2022	Accepted for publication	08.01.2022