

Вестник НГУЭУ. 2024. № 1. С. 30–44

Vestnik NSUEM. 2024. No. 1. P. 30–44

Научная статья

УДК 330.11.4:330.3

DOI: 10.34020/2073-6495-2024-1-030-044

МЕТОД НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ПУАНКАРЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВА

Кузнецов Сергей Борисович¹, Гладковский Олег Петрович²

¹ Новосибирский государственный университет

экономики и управления «НИИХ»

^{1,2} Сибирский институт управления – филиал Российской академии
народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации

¹ kuznetsov-sb@ranepa.ru

² gladkovskiy-op@ranepa.ru

Аннотация. В качестве основных факторов производства в работе рассматриваются физический капитал и трудовые ресурсы. Изучение поведения основных факторов производства основывается на анализе объемов инвестиций в них, амортизации физического капитала и изменениях объема трудовых ресурсов. В большинстве исследований на эту тему не рассматриваются вопросы, связанные с перекосами в финансировании и их возможными последствиями для основных факторов производства. Для оценки этих последствий были выведены формулы, включающие частные производные от объемов инвестиций по каждому из основных факторов. Использование этих формул помогает разработать алгоритм инвестирования, способствующий устойчивому росту основных факторов производства. В качестве основного метода исследования был выбран метод нормальных форм Пуанкаре, который позволяет упростить изначальную задачу и свести ее к анализу в линейной форме. Была проведена классификация возможных вариантов собственных чисел, полученной линейной формы. Определено поведение основных факторов производства в зависимости от найденных собственных чисел. Этот метод позволяет получить более понятные результаты и сделать более точные выводы. Полученные результаты были протестированы на ряде федеральных округов России и ряде стран Евросоюза. Тестирование показало качественное совпадение с реальным состоянием основных факторов производства. Это говорит о том, что разработанный алгоритм инвестирования может быть применен в практических условиях, способствуя достижению стабильного роста в различных регионах России. Данное исследование имеет важное значение для понимания и оптимизации процессов производства и развития экономики. Оно предоставляет основу для разработки эффективных стратегий инвестирования и принятия решений, способствующих уравновешенному и направленному развитию основных факторов производства.

Ключевые слова: нормальные формы Пуанкаре, система дифференциальных уравнений, основные фонды производства, объем инвестирования, формула Тейлора, нерезонансные слагаемые, собственные числа

Для цитирования: Кузнецов С.Б., Гладковский О.П. Метод нормальных форм Пуанкаре при исследовании факторов производства // Вестник НГУЭУ. 2024. № 1. С. 30–44. DOI: 10.34020/2073-6495-2024-1-030-044.

© Кузнецов С.Б., Гладковский О.П., 2024

Original article

POINCARÉ'S METHOD OF NORMAL FORMS IN THE STUDY OF FACTORS OF PRODUCTION

Kuznetsov Sergey B.¹, Gladkovsky Oleg P.²

¹ *Novosibirsk State University of Economics and Management*

^{1,2} *Siberian Institute of Management – Branch of Russian Presidential Academy
of National Economy and Public Administration*

¹ kuznetsov-sb@ranepa.ru

² gladkovskiy-op@ranepa.ru

Abstract. As the main factors of production, the paper considers physical capital and labor resources. The study of the behavior of the main factors of production is based on the analysis of the volume of investment in them, the depreciation of physical capital and changes in the volume of labor resources. Most of the studies on this topic do not address issues related to distortions in financing and their possible consequences for the main factors of production. To assess these consequences, formulas were derived that include partial derivatives of investment volumes for each of the main factors. The use of these formulas helps to develop an investment algorithm that contributes to the sustainable growth of the main factors of production. The method of Poincaré normal forms was chosen as the main research method, which allows us to simplify the initial problem and reduce it to an analysis in a linear form. A classification of possible variants of eigenvalues, the resulting linear form was carried out. The behavior of the main factors of production depending on the found eigenvalues is determined. This method allows you to get more understandable results and draw more accurate conclusions. The results obtained were tested in a number of federal districts of Russia and a number of EU countries. Testing showed a qualitative match with the real state of the main factors of production. This suggests that the developed investment algorithm can be applied in practical conditions and contribute to the achievement of stable growth in various regions of Russia. This study is important for understanding and optimizing production processes and economic development. It provides a basis for developing effective investment and decision-making strategies that promote both a balanced and directed development of the main factors of production.

Keywords: poincaré normal forms, system of differential equations, fixed assets of production, investment volume, Taylor formula, non-resonant terms, eigenvalues

For citation: Kuznetsov S.B., Gladkovsky O.P. Poincaré's method of normal forms in the study of factors of production. *Vestnik NSUEM*. 2024; (1): 30–44. (In Russ.). DOI: 10.34020/2073-6495-2024-1-030-044.

Введение

Алгоритмы инвестирования в основные фонды производства все еще не являются оптимальными. Часто предприниматели и государство решают определенные задачи, не увязывая с последствиями в перекосах между основными фондами производства и трудовыми ресурсами. Проблемы с нехваткой трудовых ресурсов были давно, но решать их начали сейчас и исключительно «пожарным» методом. Получение алгоритма инвестирования, основанного на математической модели, будет представлять определенный интерес среди профессионалов. Цель исследования – разработка такого алгоритма на основе нормальных форм.

Автором нормальных форм является знаменитый французский математик Э. Пуанкаре (Henri Poincaré). Он внес значительный вклад в различные области математики, включая теорию функций комплексного переменного, теорию дифференциальных уравнений и топологию. Одна из основных его работ, относящаяся к нормальным формам, “*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*” (Новые методы небесной механики) [1]. В ней он исследовал динамику небесных тел и предложил новые методы аналитического представления движения небесных объектов в терминах нормальных форм. Пуанкаре изложил математические основы и методы, используемые для представления динамических систем в нормальной форме, разработал различные алгоритмы и приближенные методы, позволяющие упростить сложные системы дифференциальных уравнений и получить их аналитические решения в виде нормальных форм.

Системный подход с применением нормальных форм в различных отраслях знаний предложил В.И. Арнольд [3]. В его книге представлен набор основных концепций и подходов, используемых для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложений в естественно-научных областях. Рассматриваются простые методы интегрирования с учетом общего математического контекста, например, разрешение особых случаев, использование групп Ли симметрии, построение диаграмм Ньютона и др.

А.Д. Брюно вводит концепцию локального метода, который позволяет анализировать и решать нелинейные уравнения на малых интервалах или окрестностях [4]. Опираясь на работу Пуанкаре, Брюно представляет основные понятия и методы локального анализа, такие как теория неподвижных точек, теория сжимающих отображений и метод Фреше. Он применяет эти методы к различным классам нелинейных дифференциальных уравнений, включая обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. С помощью примеров и вычислительных подходов автор демонстрирует применимость предложенных методов к различным практическим задачам.

Прорывом в изучении нормальных форм без сомнения является работа И. Курамото и Т. Цузуки [14]. В ней авторы исследуют формирование диссипативных структур в системах реакции и диффузии. Они рассматривают процессы, в которых химические реакции и диффузия влияют на динамику системы. Авторы предлагают модель, которая объясняет образование различных диссипативных структур – вихри, спирали и фронты взрыва в реакционно-диффузионных системах. Исследуется влияние различных параметров на формирование этих структур и предлагают свои результаты и выводы. Работа Курамото и Цузуки помогает лучше понять процессы, происходящие в системах реакции и диффузии, их динамику. Исследования могут иметь применение в различных научных и технических областях, таких как химия, физика, экономика и биология.

В [6] описывается нормализация Пуанкаре–Дюлака, а также алгоритм получения форм, возникающие структуры нормальных форм. Изучается нормализация дифференциально-разностных уравнений. Монография [7] посвящена изучению нелинейных колебаний, динамических систем и бифуркаций векторных полей. В ней приводятся основные концепции и

методы, связанные с динамикой нелинейных систем. Авторы обращаются к темам – стационарность, устойчивость, периодические и хаотические режимы, а также бифуркации и качественный анализ векторных полей. В [15] проводится анализ современного состояния теории нормальных форм и области их применения. Работа [16] посвящена вопросу нормализации системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с выделенной дифференциальной частью. Стоит отметить [1, 2, 5, 8, 9, 11, 13], в которых обсуждается и применяется метод нормальных форм Пуанкаре в различных приложениях. Список работ, изучающих особенности метода нормальных форм, далеко не полный, но здесь указаны основные, задающие направления для дальнейших исследований.

Предмет исследования данной статьи – изменения, возникающие в основных факторах производства при проведении инвестиций. Однако важная особенность и новизна данного исследования – анализ частных производных объемов инвестирования по основным факторам производства. Путем анализа знаков некоторых комбинаций этих производных возникают различные виды устойчивости и неустойчивости в развитии факторов производства. Изучение поведения данных частных производных предоставляет экономистам исследователям инструмент для прогнозирования развития экономики. Оно позволяет получить информацию о тенденциях и перспективах развития основных факторов производства на основе их временных аналогов. Знание принципов, по которым эти производные изменяются во времени, является ценным ресурсом в предвидении будущих тенденций в экономике.

Таким образом, авторы рассматривают новые подходы к анализу и прогнозированию изменений в основных факторах производства, используя в полученных формулах частные производные объемов инвестирования по основным факторам производства. Это способствует более точному пониманию и предсказанию развития экономических процессов и имеет практическое применение для экономистов и исследователей.

Методология

Метод нормальных форм Пуанкаре представляет собой аналитический инструмент, который используется в теории динамических систем, чтобы исследовать поведение сложных систем, особенно нелинейных дифференциальных уравнений. Этот метод позволяет упростить систему дифференциальных уравнений путем приведения ее к нормальной форме, где особенности поведения системы становятся более очевидными. Используя метод нормальных форм Пуанкаре, можно анализировать особенности системы, такие как устойчивость, предельные циклы, бифуркации и другие характеристики. Этот метод позволяет получить более глубокое понимание системы, ее эволюции и возможных изменений в зависимости от параметров. Одно из основных преимуществ метода нормальных форм Пуанкаре состоит в том, что он является универсальным и может применяться к широкому классу систем. Это делает его ценным инструментом в различных научных и инженерных областях, включая физику, биологию, экономику и др.

Рассмотрим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих прирост основных факторов производства:

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = I_K(K, L, E), \\ \frac{dL}{dt} = I_L(K, L, E), \end{cases} \quad (1)$$

где K – основные фонды, L – трудовые ресурсы, I_K – объем инвестиций в физический капитал, I_L – объем инвестиций в трудовые ресурсы, E – экономическое число [10].

Нам известны значения основных фондов и объем трудовых ресурсов в начальный момент времени $K(0) = K_0$, $L(0) = L_0$, тогда точка (L, K) при $E = E_0$, является устойчивой особой точкой.

Воспользуемся формулой Тейлора и произведем разложение функций объема инвестиций в окрестности точки (K_0, L_0) :

$$\begin{cases} I_K(K, L, E) = I_K(K_0, L_0, E_0) + h_K \frac{\partial}{\partial K} I_K(K_0, L_0, E_0) + \\ + h_L \frac{\partial}{\partial L} I_K(K_0, L_0, E_0) + g(h_K^k, h_L^k, h_K^{k_1}, h_L^{k_2}), \\ I_L(K, L, E) = I_L(K_0, L_0, E_0) + h_K \frac{\partial}{\partial K} I_L(K_0, L_0, E_0) + \\ + h_L \frac{\partial}{\partial L} I_L(K_0, L_0, E_0) + g(h_K^k, h_L^k, h_K^{k_1}, h_L^{k_2}), \end{cases}$$

где $h_K = K - K_0$, $h_L = L - L_0$, $g(h_K^k, h_L^k, h_K^{k_1}, h_L^{k_2})$ – полином, зависящий от k -х производных в начальной точке и k степеней сдвигов по основным факторам производства. Степень $k \geq 2$. У возникающих полиномов смешанные производные также имеют суммарную степень $k = k_1 + k_2$.

Систему уравнений (1) можно переписать в матричном виде:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x, E), \quad (2)$$

$$\text{где } x = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a = \frac{\partial}{\partial K} I_K(K_0, L_0, E_0), \quad b = \frac{\partial}{\partial L} I_K(K_0, L_0, E_0), \\ c = \frac{\partial}{\partial K} I_L(K_0, L_0, E_0), \quad d = \frac{\partial}{\partial L} I_L(K_0, L_0, E_0).$$

В вектор $f(x, E)$ вошли все остальные члены уравнения. Для простоты вычислений начало координат линейным сдвигом перенесем в точку (K_0, L_0) , этот сдвиг не повлияет на общие выводы.

Найдем собственные значения матрицы A :

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc}. \quad (3)$$

К уравнению (2) применим прием, предложенный в работе [16, с. 1–2]. Уравнение переписывается в виде

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \Lambda \tilde{x} + f(\tilde{x}, E), \quad (4)$$

где Λ – диагональная матрица из собственных значений, $\tilde{x}$ – собственный вектор матрицы.

Воспользуемся методом нормальных форм Пуанкаре. Уберем из правой части (4) все выражения в степени k .

Найдем преобразование вида

$$\tilde{x} = y + P(y), \quad (5)$$

где $P(y) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $p_i = \sum_{k_1, k_2}^k p_{k_1, k_2}^i y_1^{k_1} y_2^{k_2}$, $k = k_1 + k_2$.

Каждый из этих полиномов содержит k мономов. Коэффициенты p_{k_1, k_2}^i подберем таким образом, чтобы все члены k -й степени исчезли.

Подставим замену (5) в уравнение (4)

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{\partial P}{\partial y^T} \right) \frac{dy}{dt} &= \Lambda y + \Lambda P + f(y + P, E), \\ \frac{dy}{dt} &= \left(E + \frac{\partial P}{\partial y^T} \right)^{-1} (\Lambda y + \Lambda P + f(y + P, E)), \end{aligned}$$

где E – единичная матрица, y^T – транспонированный вектор.

Последнее уравнение разложим по степеням y и выпишем слагаемые не выше степени k , слагаемые степени k в функции f обозначим f_k

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \left(E - \frac{\partial P}{\partial y^T} \right)^{-1} (\Lambda y + \Lambda P + f(y + P, E) + O(y^{k+1})) = \\ &= \Lambda y + \Lambda P + f_k(y + P, E) - \frac{\partial P}{\partial y^T} \Lambda y + O(y^{k+1}). \end{aligned}$$

Отбрасывание слагаемых степени выше k имеет смысл только тогда, когда ограничиваемся удалением нелинейных слагаемых до степени k включительно. Однако если продолжить процедуру до степени $k + 1$ и выше, то необходимо учитывать соответствующие слагаемые на следующей итерации метода. Коэффициенты p_{k_1, k_2}^i подберем так, чтобы в полученной системе слагаемые степени k исчезли, т.е.

$$\Lambda P + f_k(y + P, E) - \frac{\partial P}{\partial y^T} \Lambda y = 0.$$

Запишем гомологическое уравнение в скалярном виде:

$$\lambda_i p_i + f_{i,k}(y + P, E) - \left(\frac{\partial p_i}{\partial y_1} \lambda_1 y_1 + \frac{\partial p_i}{\partial y_2} \lambda_2 y_2 \right) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Получено линейное уравнение относительно p_i . Задачу поэтому можно разбить на отдельные подзадачи, где каждое слагаемое полинома p_i исключается по отдельности. Оставим только слагаемые с одинаковыми наборами степеней в обеих частях уравнения при переменных y_1, y_2 : $p_{k_1, k_2}^i, f_{k_1, k_2}^i$

$$(\lambda_i - k_1 \lambda_1 - k_2 \lambda_2) p_{k_1, k_2}^i y_1^{k_1} y_2^{k_2} = -f_{k_1, k_2}^i y_1^{k_1} y_2^{k_2},$$

$$p_{k_1, k_2}^i = \frac{f_{k_1, k_2}^i}{(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 - \lambda_i)}.$$

В этом случае нелинейности степени k исчезают. Если знаменатель равен нулю, то возникают резонансные показатели k_1, k_2 . Наши собственные числа обладают резонансом степени $k = k_1 + k_2$.

Согласно предложенному алгоритму, все нерезонансные слагаемые в правой части системы (4) могут быть исключены при помощи последовательно применяемых полиномиальных замен. Эти замены позволяют устранить нелинейные слагаемые, не приводящие к резонансу степени k или выше. Однако резонансные слагаемые не могут быть исключены или каким-либо образом преобразованы. Это обусловлено их особым влиянием и значимостью в системе. Таким образом, алгоритм позволяет устранить нерезонансные слагаемые и сосредоточиться на резонансных, которые остаются неизменными в дальнейших преобразованиях.

Количество резонансных слагаемых и их тип определяются только собственными значениями λ матрицы A , которая является линейной частью системы. Важно подчеркнуть, что для нахождения числа резонансных слагаемых и их степени достаточно выполнить линеаризацию исходной системы (1) и найти собственные значения матрицы A . Дополнительно, если требуется определить коэффициенты при резонансных слагаемых, необходимо применить описанные выше преобразования.

Линеаризация системы и вычисление собственных значений матрицы A позволяют установить количество и тип резонансных слагаемых, а проведенные выше преобразования помогут определить коэффициенты этих слагаемых.

Теорема Пуанкаре – Дюлака утверждает, что с использованием полиномиальных преобразований система (1) может быть приведена к форме, в которой присутствуют только линейные и резонансные слагаемые [6, с. 7].

При переходе к базису из собственных векторов происходят линейные преобразования растяжения и сжатия, которые на качественную картину траекторий не влияют. В нашем случае резонанс возникает при выполнении двух равенств:

$$\frac{1 - k_1}{k_2} = \frac{\frac{a+d}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc}}{\frac{a+d}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc}},$$

$$\frac{k_1}{1-k_2} = \frac{\frac{a+d}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc}}{\frac{a+d}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc}}.$$

Слева в равенствах рациональная дробь, а справа, в общем случае, комплексное число с иррациональным коэффициентом при мнимой части. Существование такого равенства невозможно. Вырожденным случаем является $b = 0$, $c \neq 0$, или $c = 0$, $b \neq 0$, либо $b = 0$, $c = 0$. Эти равенства означают, что изменение объема трудовых ресурсов никак не влияет на объем инвестиций в основной капитал, или изменение объема капитала не влияет на объем инвестиций в трудовые ресурсы, либо эти явления происходят одновременно. Последние равенства принимают вид

$$\frac{1-k_1}{k_2} = \frac{a}{d}, \quad \frac{k_1}{1-k_2} = \frac{a}{d}, \quad (6)$$

хотя существование таких явлений на практике сложно представить. Изменение физического капитала влияет на объем инвестиций и в капитал, и в трудовые ресурсы. Также и изменение трудовых ресурсов повлечет изменение инвестиций. Но теоретически возможен резонанс при выполнении равенства (6). Изучение этого явления представляет тему отдельного исследования.

В случае отсутствия резонансных слагаемых

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda x.$$

Матрица в правой части является диагональной с собственными числами (3) по диагонали.

Решением этой системы будет выражение с положительными константами c_1 , c_2

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (7)$$

Рассмотрим все возможные варианты для собственных чисел:

1. $a + d > 0$, $ad > bc > \left(\frac{a-d}{2}\right)^2$. Оба собственных числа действительны и положительны, наблюдается рост основных факторов производства. Точка покоя – неустойчивый узел, положение неустойчивое.

2. $a + d > 0$, $ad < bc$, $\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 > -bc$ или второй вариант $a + d < 0$, $ad < bc$, $\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 > -bc$. Оба собственных числа действительны. Одно собственное число положительно, второе отрицательно. Могут наблюдаться колебательные движения в росте основных факторов производства. Точка покоя – седло, положение неустойчивое.

3. $a + d < 0$, $ad > bc > \left(\frac{a-d}{2}\right)^2$. Собственные числа действительны и оба отрицательные. Наблюдается деградация основных факторов производства. Точка покоя – устойчивый узел, положение асимптотически устойчивое.

4. $a + d > 0$, $\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 < -bc$. Собственные числа представляют пару самосопряженных комплексных чисел с положительной действительной частью. Точка покоя – неустойчивый фокус, положение неустойчивое.

5. $a + d < 0$, $\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 < -bc$. Собственные числа представляют пару самосопряженных комплексных чисел с отрицательной действительной частью. Точка покоя – устойчивый фокус, положение устойчивое.

6. $a + d = 0$, $\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 < -bc$. Собственные числа представляют пару самосопряженных комплексных чисел с нулевой действительной частью. Точка покоя – центр, положение устойчивое по Ляпунову, но асимптотически неустойчиво.

7. $ad = bc$. Одно собственное число нулевое, а второе действительное, знак которого зависит от знака $a + d$. Точка покоя неизолированная и представляет целую прямую. В случае положительного знака наблюдается рост факторов производства, при отрицательном значении идет деградация.

Рассмотрены основные случаи поведения собственных чисел, за исключением равенства чисел или существование нулевого собственного числа, что в реальной экономике невероятно.

Анализ федеральных округов России и стран ЕС

Проанализируем состояние нескольких федеральных округов, используя аппарат нормальных форм. Статистические данные брались из сборника [17]. Расчеты показали, что четыре из семи случаев, описанных выше, встречались в развитии основных факторов производства в России в течение 10 лет (табл. 1).

В период с 2006 по 2008 г. собственные числа матрицы нормальной формы были действительными и обладали разными знаками. Но отрицательное собственное число в 3–4 раза меньше положительного, при экспоненциальном росте равенства (7) основной вклад будет давать положительное собственное число. Этот факт указывает на колебательный характер роста основных фондов производства на начальных моментах времени, а с увеличением времени начнется экспоненциальный рост. Более того, в следующем году, т.е. после исследуемого периода, для Центрального федерального округа было выявлено, что матрица нормальной формы обладала отрицательными собственными числами. Подобная тенденция указывала на незначительное уменьшение основных фондов в первые моменты вре-

Таблица 1

Собственные числа

Федеральный округ	2006 г.	2007 г.	2008 г.	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.	2014 г.	2015 г.
Центральный	λ_1	-0,49	-0,49	-0,64	-3,78	-0,57	-0,65	-0,05 + i0,44	-0,51	-5,16
	λ_2	1,49	1,33	2,35	-1,64	1,55	2,48	-0,05 - i0,44	1,28	-1,24
Северо-Западный	λ_1	-0,37	-0,51	-0,48	-1,05 + i1,06	-0,07 + i0,51	-0,73	-0,31 + i0,74	-0,4 + i0,94	-6,98
	λ_2	1,05	1,65	1,82	-1,05 - i1,06	-0,07 - i0,51	4,66	-0,31 - i0,74	-0,4 - i0,94	-1,14
Приволжский	λ_1	-0,53	-0,57	-0,52	-0,97 + i1,05	-0,49	-0,66	-0,31	-0,57	-4,47
	λ_2	2,02	2,80	2,06	-0,97 - i1,05	1,28	2,99	1,60	2,26	-1,24
Уральский	λ_1	-0,47	-0,58	-0,53	-0,66	-0,14 + i0,55	-0,66	-0,27 + i0,7	-0,48	-7,08
	λ_2	1,43	2,51	1,90	1,32	-0,14 - i0,55	3,36	-0,27 - i0,7	1,26	-1,17
Сибирский	λ_1	-0,46	-0,55	-0,45	-2,14 + i0,14	-0,39	-0,62	-0,31 + i0,75	-0,63	-5,68
	λ_2	1,82	2,35	1,71	-2,14 - i0,14	1,09	3,71	-0,31 - i0,75	1,59	-1,33
Дальневосточный	λ_1	-0,43	-0,43	-0,44	-1,46 + i0,73	-0,43	-0,56	-0,22 + i0,6	-0,44	-0,8 + i0,96
	λ_2	1,36	1,45	2,20	-1,46 - i0,73	1,65	2,42	-0,22 + i0,6	0,33	-0,8 - i0,96

мени, а далее наступает кризис. Весьма интересно, что в это же время поведение основных факторов производства в Уральском федеральном округе оставалось неизменным и не меняло своего характера в течение трех лет.

Проанализировав данные за 2009 г., было обнаружено, что матрицы нормальных форм для Северо-Западного, Приволжского, Сибирского и Дальневосточного федеральных округов имели комплексные значения собственных чисел. Особенностью этих значений была отрицательная действительная часть, что свидетельствовало об устойчивом положении факторов производства. Следует отметить, что устойчивое положение не подразумевает развития, но и не означает деградацию. При таком развитии ситуации основные фонды производства стремятся к определенному значению. Важно отметить, что в следующем году аналогичная картина наблюдалась снова в Северо-Западном и также первый раз появилась в Уральском федеральном округе. Однако во всех остальных округах наблюдался колебательный рост основных фондов производства. Интересно, что в 2011 г. положительные собственные значения в 4–6 раз больше отрицательных, взятых по модулю во всех перечисленных округах. Колебательное изменение основных факторов должно быстро заменяться на устойчивый экспоненциальный рост. Что касается последующего года, он показал устойчивое положение основного капитала и трудовых ресурсов во всех округах как в 2009 г., за исключением Приволжского, где происходило колебательное поведение факторов производства. Особо стоит обратить внимание в 2012 г. на Центральный федеральный округ, собственные значения обладают практически нулевой действительной частью. Это явление начинает приближать основные факторы производства к точке покоя – центр и они будут устойчивы по Ляпунову. В 2013–2014 гг. наблюдаются разнонаправленные собственные значения, которые отличаются в 2–3 раза, а в Дальневосточном федеральном округе отрицательное собственное число по модулю больше положительного. Если в первом случае после кратковременных колебательных траекторий развития факторов производства начинается рост, то в Дальневосточном федеральном округе деградация. В 2013 г. Северо-Западный федеральный округ демонстрировал в отличие от других округов устойчивое положение факторов производства. Следующий год показал, что положительное собственное число было больше модуля отрицательного в 2–7 раз, т.е. пульсирующее развитие факторов производства с разным промежутком времени выходило на экспоненциальный рост. Самый последний год анализируемого периода показал деградацию основных фондов производства во всех федеральных округах, за исключением Дальневосточного, где наблюдалось устойчивое положение.

Были проведены расчеты для ряда стран ЕС. Статистические данные брались из интернет-издания [18]. Результаты расчетов представлены в табл. 2. Здесь наблюдается более однородное поведение факторов производства.

Во всех странах, кроме Греции, одно из собственных чисел всегда равно нулю. Это означает, что развитие основных факторов производства проходит стабильно. В определенные годы наблюдается деградация факторов: в Австрии 2005, 2011 гг.; в Бельгии 2010, 2014 гг.; в Германии 2005, 2006, 2008, 2010, 2011, 2013 гг.; в Ирландии сильно 2009 и 2014, 2015 гг.;

Таблица 2

Собственные числа

Страна		2003 г.	2004 г.	2005 г.	2006 г.	2007 г.	2008 г.	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.	2014 г.	2015 г.
Австрия	λ_1	0,00	0,00	-0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
	λ_2	0,24	0,11	0,00	0,10	0,08	0,04	0,05	0,15	0,00	0,09	0,08	0,18	0,09
Бельгия	λ_1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-2,10	0,00	0,00	0,00	-0,05	0,00
	λ_2	0,42	0,30	0,24	0,20	0,06	0,14	0,11	0,00	0,05	0,15	0,07	0,00	0,17
Германия	λ_1	0,00	0,00	-0,01	-0,10	0,00	-0,14	0,00	-0,05	-0,09	0,00	-0,04	0,00	0,00
	λ_2	0,35	0,17	0,00	0,00	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,00	0,05	0,12
Ирландия	λ_1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-2,73	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,33	-0,76
	λ_2	0,30	0,28	0,23	0,18	0,17	0,08	0,00	0,02	0,39	0,36	0,25	0,00	0,00
Греция	λ_1	-0,20	-0,20	-0,21	-0,46	0,00	0,00	0,00	-1,37	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	λ_2	0,01	0,01	-0,03	0,02	0,22	0,24	-0,03	0,19	1,10	0,39	0,49	0,08	0,05
Франция	λ_1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,05	0,00	-0,11	0,00	-0,09	0,00
	λ_2	0,25	0,16	0,08	0,04	0,03	0,08	0,04	0,00	0,34	0,00	0,11	0,00	0,12
Италия	λ_1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,25	0,00	0,00	-0,35	-1,09	0,00
	λ_2	0,09	0,11	0,09	0,08	0,07	0,02	0,06	0,00	0,03	0,01	0,00	0,00	0,23
Англия	λ_1	0,00	-0,14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,02	0,00
	λ_2	0,11	0,00	0,06	0,06	0,07	0,10	0,15	0,08	0,12	0,09	0,08	0,00	0,12

во Франции 2010, 2012, 2014 гг.; в Италии 2010, 2013–2014 гг.; в Англии 2004 и 2014 гг.

В 2009 г. в Германии оба собственных числа оказались равны нулю, что может указывать на постоянство основных фондов, т. е. инвестиции в это время шли в объеме амортизаций. В рассмотренный период 2002–2015 гг. экономика Германии работала на грани своих возможностей, на что указывали маленькие отрицательные собственные числа.

Особое место занимает Греция. Поведение ее основных факторов производства оказалось ближе к поведению в федеральных округах. Стабильный рост факторов наблюдался в 2007–2008 гг. и 2011–2015 гг., но в последние два года он скорее символический, чем реальный. В 2003–2004 гг. наблюдались кратковременные колебания с переходом в деградацию факторов производства, 2005 г. – деградация, 2006 г. – кратковременное колебание и снова деградация, 2009 г. – деградация, 2010 г. – небольшое пульсирование и снова деградация. Какая-то стабильность в небольшом росте наступила только после 2011 г.

В целом основные факторы производства рассмотренных стран меньше подвержены хаотическим явлениям, кроме Греции, и поэтому легче прогнозируемы.

Заключение

По результатам исследования экономик конкретных регионов можно сделать вывод, что страны Евросоюза имеют устойчивое развитие факторов производства в сравнении с нашими федеральными округами. Кризисы переносятся довольно стабильно, не имея длительных последствий, чего нельзя сказать о наших округах.

Представленное исследование имеет определенное значение в области анализа основных факторов производства. Оно было проведено с целью разработки алгоритма, который позволяет более детально изучить эти факторы. В этой работе был рассмотрен нерезонансный случай. Возможность применения полученных теоретических результатов к резонансному случаю позволит получить полную картину всех возможных ситуаций, которые могут возникнуть в экономике региона или страны. Это новый шаг в развитии понимания взаимосвязи инвестиций и их влияния на основные факторы производства экономики. Исследование проведено с использованием алгоритма нормальных форм Пуанкаре, который был использован для получения результатов. Однако следует отметить, что полученные результаты и алгоритм следует применять осторожно, учитывая специфические условия региона или страны, так как каждая экономика может иметь свои особенности. В целом представленное исследование вносит важный вклад в понимание развития основных факторов производства и может быть полезным инструментом для принятия решений в экономической сфере.

Список источников

1. Андропова А.А., Витт А.А., Хайкина С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
2. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.

3. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
4. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
6. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Локальные методы анализа динамических систем / Ярославский гос. ун-т. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 92 с.
7. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
8. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1988. 368 с.
9. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 304 с.
10. Кузнецов С.Б. Экономическое число // Экономика и управление. 2010. № 11 (61). С. 32–37.
11. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
12. Пуанкаре А. Избранные труды в 3-х т. Т. 1. М.: Наука, 1971. 772 с.
13. Синай Я.Г. Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 192–212.
14. Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction diffusion systems // Prog. Theor. Phys. 1975. Vol. 54, no. 3. P. 687–689.
15. Nayfeh Ali H. The Method of Normal Forms / 2nd, Updated and Enlarged Edition. 2011. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Boschstr. 12, 69469 Weinheim, Germany.
16. Сахаров А.В. Метод нормальных форм Пуанкаре. URL: MIPT.ru/upload/medialibrary/9d5/sakharov-a.v.-metod
17. Федеральная служба государственной статистики. URL: <http://www.gks.ru/> (дата обращения: 21.01.2023).
18. Eurostat: [Электронный ресурс]. URL: <http://epp.eurostat.ec.europa.eu> (дата обращения: 21.01.2023).

References

1. Andronova A.A., Vitt A.A., Hajkina S.Je. Teorija kolebanij [Oscillation theory]. Moscow, Nauka, 1981. 568 p.
2. Anishhenko V.S. Slozhnye kolebanija v prostyh sistemah [Complex oscillations in simple systems]. Moscow, Nauka, 1990. 312 p.
3. Arnol'd V.I. Dopolnitel'nye glavy teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Additional chapters of the theory of ordinary differential equations]. Moscow, Nauka, 1978. 304 p.
4. Brjuno A.D. Lokal'nyj metod nelinejnogo analiza differencial'nyh uravnenij [Local method of nonlinear analysis of differential equations]. Moscow, Nauka, 1979. 255 p.
5. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimptoticheskoe razlozhenie reshenij singuljarno voz-mushhennyh uravnenij [Asymptotic expansion of solutions to singularly perturbed equations]. Moscow, Nauka, 1973. 272 p.
6. Glyzin S.D., Kolesov A.Ju. Lokal'nye metody analiza dinamicheskikh sistem [Local methods of analysis of dynamic systems]. Jaroslavskij gos. un-t. Jaroslavl': JarGU, 2006. 92 p.
7. Gukenhejmer Dzh., Holms F. Nelinejnye kolebanija, dinamicheskie sistemy i bifurkacii vektornyh polej [Nonlinear oscillations, dynamic systems and bifurcations of vector fields]. Moscow; Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2002. 560 p.
8. Zaslavskij G.M. Stohastichnost' dinamicheskikh system [Stochasticity of dynamic systems]. Moscow, Nauka, 1988. 368 p.

9. Joss Zh., Dzhozef D. Jelementarnaja teorija ustojchivosti i bifurkacij [Elementary theory of stability and bifurcations]. Moscow, Mir, 1983. 304 p.

10. Kuznecov S.B. Jekonomicheskoe chislo [Economic number]. *Jekonomika i upravlenie* [Economics and management], 2010, no. 11 (61), pp. 32–37.

11. Ovsjannikov L.V. Gruppovoj analiz differencial'nyh uravnenij [Group analysis of differential equations]. Moscow, Nauka, 1978. 399 p.

12. Puankare A. Izbrannye trudy v 3-h t. T. 1 [Selected works in 3 vol. Vol. 1]. Moscow, Nauka, 1971. 772 p.

13. Sinaj Ja.G. Stohastichnost' dinamicheskikh sistem [Stochasticity of dynamic systems]. Nelinejnye volny [Nonlinear waves]. Moscow, Nauka, 1979. Pp. 192–212.

14. Kuramofo Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction diffusion systems. *Prog. Theor. Phys.*, 1975, vol. 54, no. 3, pp. 687–689.

15. Nayfeh Ali H. The Method of Normal Forms / 2nd, Updated and Enlarged Edition. 2011. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Boschstr. 12, 69469 Weinheim, Germany.

16. Saharov A.V. Metod normal'nyh form Puankare [Poincare's method of normal forms]. Available at: MIPT.ru/upload/medialibrary/9d5/sakharov-a.v.-metod

17. Federal'naja sluzhba gosudarstvennoj statistiki. [Federal State Statistics Service]. Available at: <http://www.gks.ru/> (accessed: 21.01.2023).

18. Eurostat: [Electronic resource]. Available at: <http://epp.eurostat.ec.europa.eu> (accessed: 21.01.2023).

Сведения об авторах:

Кузнецов Сергей Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и естественных наук, Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИНХ», доцент кафедры информатики и математики, Сибирский институт управления – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Новосибирск, Российская Федерация.

Гладковский Олег Петрович – преподаватель кафедры информатики и математики, Сибирский институт управления – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Новосибирск, Российская Федерация.

Information about the authors:

Kuznetsov Sergey B. – Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Natural sciences, Novosibirsk State University of Economics and Management, Associate Professor of the Department of Informatics and Mathematics, Siberian Institute of Management – Branch of Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Novosibirsk, Russian Federation.

Gladkovsky Oleg P. – Lecturer at the Department of Informatics and Mathematics, Siberian Institute of Management – Branch of Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Novosibirsk, Russian Federation.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию	20.11.2023	The article was submitted	20.11.2023
Одобрена после рецензирования	19.01.2024	Approved after reviewing	19.01.2024
Принята к публикации	20.01.2024	Accepted for publication	20.01.2024