

Вестник НГУЭУ. 2024. № 2. С. 101–114  
Vestnik NSUEM. 2024. No. 2. P. 101–114

Научная статья  
УДК 330.11.4:330.3  
DOI: 10.34020/2073-6495-2024-2-101-114

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВА УРАВНЕНИЕМ НАВЬЕ–СТОКСА

Кузнецов Сергей Борисович

*Новосибирский государственный университет  
экономики и управления «НИИХ»  
Сибирский институт управления – филиал РАНХиГС  
sbk1314@mail.ru*

**Аннотация.** Данная статья посвящена математическому моделированию развития основных факторов производства под влиянием скорости инвестирования. Рассматривается вопрос влияния государственных, межгосударственных и естественных ограничений на экономический рост через анализ взаимосвязи между факторами производства. В статье представлена концепция тензора сопротивления экономической среды, которая позволяет учесть воздействие изменений экономической политики на развитие факторов производства. При построении тензора сопротивления делается попытка отразить влияние на развитие экономики внешних и внутренних факторов национальной экономики, таких как налоговая политика, конкуренция и банковская система, таможенное законодательство, санкции и т.п. Важным моментом в статье являются уравнения, связывающие скорость освоения инвестиций и скорость изменения основных факторов производства в экономическом объекте. Анализируя эту связь, можно лучше понять динамику экономического развития и возможные факторы, влияющие на него.

Статья также предлагает новую систему уравнений экономического роста, в которой используется тензор сопротивления экономической среды, аналогичную векторному уравнению Навье–Стокса. Однако решение нелинейного уравнения Навье–Стокса остается сложной задачей, поэтому предлагается использовать подход с кусочно-постоянными коэффициентами, описывающими состояние экономической среды. Это позволяет учесть нестационарные процессы и распределение скорости освоения инвестиций. Работа подчеркивает важность математического моделирования для понимания развития основных факторов производства в национальной экономике. Учет воздействия сопротивления экономической среды помогает улучшить представление о динамике экономического роста и выявить факторы, оказывающие наибольшее влияние на этот процесс.

**Ключевые слова:** основные факторы производства, инвестиции, уравнение Навье–Стокса, сопротивление экономической среды, уравнение экономического роста, коэффициент ведения бизнеса

**Для цитирования:** Кузнецов С.Б. Моделирование развития факторов производства уравнением Навье–Стокса // Вестник НГУЭУ. 2024. № 2. С. 101–114. DOI:10.34020/2073-6495-2024-2-101-114.

Original article

## NAVIER–STOKES EQUATION FOR MODELING THE DEVELOPMENT OF PRODUCTION FACTORS

Kuznetsov Sergey B.

*Novosibirsk State University of Economics and Management  
Siberian Institute of Management – branch of RANEPA*

sbk1314@mail.ru

**Abstract.** This article is devoted to mathematical modeling of the development of the main factors of production under the influence of investment speed. The issue of the influence of state, interstate and natural restrictions on economic growth is considered through an analysis of the relationship between factors of production. The article presents the concept of the resistance tensor of the economic environment, which allows us to take into account the impact of changes in economic policy on the development of factors of production. When constructing the resistance tensor, an attempt is made to reflect the influence on economic development of external and internal factors of the national economy, such as tax policy, competition and the banking system, customs legislation, sanctions, etc. An important point in the article is the equations connecting the rate of investment development and the rate of change in the main factors of production in an economic object. By analyzing this relationship, one can better understand the dynamics of economic development and the possible factors influencing it.

The article also proposes a new system of economic growth equations, which uses the resistance tensor of the economic environment, similar to the vector Navier–Stokes equation. However, solving the nonlinear Navier–Stokes equation remains a difficult task, so it is proposed to use an approach with piecewise constant coefficients describing the state of the economic environment. This allows us to take into account non-stationary processes and the distribution of the rate of investment development. The work highlights the importance of mathematical modeling for understanding the development of the main factors of production in the national economy. Taking into account the impact of resistance from the economic environment helps to improve our understanding of the dynamics of economic growth and identify the factors that have the greatest impact on this process.

**Keywords:** main factors of production, investment, Navier–Stokes equation, resistance of the economic environment, economic growth equation, business coefficient

**For citation:** Kuznetsov S.B. Navier–Stokes equation for modeling the development of production factors. *Vestnik NSUEM*. 2024; (2): 101–114. (In Russ.). DOI: 10.34020/2073-6495-2024-2-101-114.

### Введение

Скорость освоения инвестиций и скорость инвестирования оказывают воздействие на развитие экономики через их влияние на факторы производства. Математически это может быть представлено дифференциальными уравнениями в частных производных и концепцией тензора экономического сопротивления, который учитывает воздействие экономической среды на развитие факторов производства [1].

Уравнения показывают взаимосвязь скорости изменения факторов производства, инвестиций и состояния изучаемой экономики. Рассмотрение

различных сценариев построения тензора сопротивления экономической среды помогает анализировать влияние этих факторов на экономическое развитие.

Новая система уравнений экономического роста включает тензор экономического сопротивления внутри экономической структуры и является одним из вариантов уравнения Навье–Стокса. Предлагается заменить изменяющийся во времени нелинейный коэффициент, описывающий состояние экономической среды, на кусочно-постоянный [1]. Полученная система уравнений объединяет экономическое развитие с тензором экономического сопротивления. Решение системы требует учета начальных и граничных условий, при этом существующие проблемы связаны с неединственностью решений уравнения Навье–Стокса и требуют новых подходов к анализу.

Развитие экономических объектов тормозится или ускоряется из-за проявлений внешней экономической среды или внутренних действий руководства экономического объекта.

Например, на уровне национальной экономики такое влияние оказывают: изменение налоговой политики, состояние антимонопольных законов, уровень конкуренции, возможности банковской системы в кредитовании экономики, бюрократические процессы регистрации и ликвидации экономических объектов, возможности пополнения трудовых ресурсов, стимулирующие действия правительства, направленные на развитие производства или его сдерживание в процессе борьбы с циклическими проявлениями в экономике.

Если рассмотреть межнациональные отношения, то уровень влияния определяется: требованиями таможенного законодательства, возможностями миграционной политикой государств, развитием международной торговли, привлекательностью законодательства для использования иностранных капиталов и рабочей силы, существованием различных видов эмбарго и т.п. Все эти факторы определяют вид тензора сопротивления экономической среды.

Различные импульсы, как внешние, так и внутренние, влияют на экономические колебания, создавая волновые закономерности. Предсказуемые закономерности в экономических колебаниях могут проявляться даже при хаотичных причинах.

Инвестиции играют важную роль в экономических колебаниях, а стабильность экономического ландшафта может существенно влиять на интенсивность этих колебаний. Освоение инвестиций в реальную экономику характеризуется временным лагом, который можно традиционно моделировать с использованием подхода с распределенной задержкой. Предполагается, что инвестиции постепенно осваиваются на основе определенного распределения во времени, что влияет на совокупный объем освоенных чистых инвестиций.

Уравнение, связывающее скорость освоения инвестиций и скорость инвестирования в экономический объект, описывает процесс развития экономики с учетом воздействия сопротивления экономической среды. Анализируя эту связь, можно лучше понять динамику экономического развития и возможные факторы, влияющие на него.

Экономические сдвиги вызваны внешними или внутренними импульсами, которые могут возникнуть спонтанно. Эти колебания способствуют экономическому росту и помогают разрешить кризис. Р. Фриш подчеркнул, что внешние стимулы влияют на экономическую эволюцию, приводя к волнообразным закономерностям, сходны движению маятника под внешним воздействием (цит. по [2]). Между тем длительность колебаний определяется внутренним составом системы. По мнению Р. Фриша, несмотря на хаотичные причины, экономические колебания могут проявлять предсказуемые закономерности.

А.С. Пигу в своей книге «Промышленные колебания» обсуждает аналогичный взгляд на взаимосвязь между импульсами и циклической природой промышленности (цит. по [2]). Он предполагает, что каждое волнообразное движение в отрасли происходит из-за импульса, который при активации влияет на конкретные экономические обстоятельства. Эти условия диктуют исход эффекта, по факту служа коренными причинами промышленных колебаний.

Э. Хансен рассматривает экономические циклы и их влияние на национальный доход. Важность изучения экономических колебаний и их закономерностей подчеркивается как внешними, так и внутренними факторами (цит. по [2]).

В [3] трактуются основные стилизованные факты экономического роста. Выводы, сделанные в работе, указывают, что общая факторная производительность (tfp) в большей степени определяет различия в доходах и росте между странами, несмотря на различия в накоплении факторов производства; национальная политика имеет важное значение для долгосрочного роста.

В статье [4] анализируется взаимосвязь между изобилием природных ресурсов и экономическим ростом во всем мире. Основные причины, по которым ресурсное производство может препятствовать экономическому росту в течение длительных периодов, связаны с голландской болезнью, пренебрежительным отношением к образованию, поиском ренты и неудачами экономической политики.

В [5] исследуется проблема догоняющего развития стран. Улучшение качества статистических данных стимулировало глубокий анализ различных подходов и эмпирических методов для выявления ключевых факторов догоняющего развития. Результатом является синтетическая эмпирическая модель, с помощью факторного анализа большого набора переменных, к определению набора «возможностей», которые, как можно предположить, имеют решающее значение для наверстывания упущенного.

В работе [6] освещается три важных аспекта развития – доход на душу населения, возможности государства и (отсутствие) политического насилия, которые взаимосвязаны друг с другом на уровне страны. Устанавливаются причины возникновения таких кластеров развития и даются два объяснения: общие экономические, политические и социальные движущие силы и взаимодополняемость (двусторонние положительные обратные связи). Излагаются предварительные политические последствия этих моделей развития.

В статье [7] обсуждается фундаментальный вопрос экономистов о причинах успешного развития некоторых стран и отставания других, что имеет прямое отношение к борьбе с бедностью. В последние годы экономисты активно расширяют область переменных исследования, включая политическую, поведенческую, правовую и культурную экономику. В этом контексте акцент делается на влияние культуры на экономическое поведение и развитие, а также на ее устойчивость и исторические корни.

Исследование [8] представляет подход к сравнительному экономическому развитию, где указывается, что для экономического процветания необходимы инклюзивные экономические институты, создающие широкие стимулы и возможности. Различия в экономических институтах связаны с политическими институтами и выбором политики. Успех инклюзивных экономических институтов зависит от инклюзивных политических институтов, и их неудача может привести к экстрактивным институтам, порождающим бедность.

В [9] базовая конкурентоспособность определяется как ожидаемый уровень выпуска продукции на одного трудоспособного человека, отражая качество страны для бизнеса. Акцент на этом показателе подчеркивает влияние рабочей силы и производительности на уровень жизни. Авторы выделяют три фактора конкурентоспособности: социальную инфраструктуру и политические институты, денежно-кредитную и налогово-бюджетную политику и микроэкономическую среду и оценивают их влияние на производительность. Они также предлагают новую концепцию – глобальную инвестиционную привлекательность, отражающую стоимость факторов производства по отношению к конкурентоспособности страны.

Вышеперечисленные источники помогают более глубоко изучить вопросы влияния различных факторов на развитие экономики, таких как налоговая политика, конкуренция, банковская система, бюрократические процессы, трудовые ресурсы, стимулирующие действия правительства и международная торговля. Анализ этих факторов позволяет лучше понять их влияние на экономический рост.

Предлагаемая работа является развитием идей статьи [10], которая была одной из попыток создания математической модели, учитывающих влияние описанных выше факторов.

### Основная часть

В трехмерном пространстве переменных:  $K$  – основные средства производства,  $L$  – трудовые ресурсы и  $H$  – природные ресурсы. Рассмотрим экономические объекты, изменяющиеся во времени. Пусть  $\bar{F} = (K, L, H)$ . Объем чистых инвестиций в эти объекты обозначим  $\bar{I} = (I_K, I_L, I_H)$ .

Как упоминалось ранее, на изменения в экономических колебаниях влияют инвестиции, а от устойчивости экономического ландшафта может зависеть частота и интенсивность этих колебаний.

На практике освоение инвестиций в реальную экономику характеризуется временным лагом. Чтобы смоделировать это замедление, будем использовать подход с распределенной задержкой. Здесь предполагается, что

инвестиции, сделанные в момент  $\tau$  в объеме  $\bar{I}(\tau)$ , постепенно осваиваются на основе определенного распределения  $f(t, \tau)$ , причем  $\int_{\tau}^{\infty} f(t, \tau) dt = 1$ , где  $\tau$  и  $t$  представляют разные моменты времени. Поскольку инвестиции происходят не только в определенные моменты, но и в произвольные периоды  $\tau$ , к моменту времени  $t$  совокупный объем освоенных чистых инвестиций достигнет:

$$\bar{\Theta}(t) = \int_{-\infty}^t f(t, \tau) \bar{I}(\tau) d\tau.$$

В случае стационарного процесса инвестирования  $f(t, \tau) = f_1(t - \tau)$ .

Плотность распределения процесса освоения инвестиций как правило описывается экспоненциальным законом  $f_1(t - \tau) = \rho e^{-\rho(t-\tau)}$ , в этом случае

$$\bar{\Theta}(t) = \rho \int_{-\infty}^t e^{-\rho(t-\tau)} \bar{I}(\tau) d\tau,$$

где  $\rho$  – некоторая константа,  $\bar{\Theta}(t) = (\Theta_K, \Theta_L, \Theta_H)$ .

Продифференцируем последнее равенство:

$$\frac{d\bar{\Theta}(t)}{dt} = \rho(\bar{I}(t) - \bar{\Theta}(t)).$$

Дифференцируя обе части уравнения, получаем связь скорости освоения инвестиций и скорости инвестирования в экономический объект:

$$\frac{d\bar{u}(t)}{dt} = \rho(\bar{j}(t) - \bar{u}(t)),$$

где  $\frac{d\bar{\Theta}(t)}{dt} = \bar{u}(t)$  – скорость освоения инвестиций,  $\frac{d\bar{I}(t)}{dt} = \bar{j}(t)$  – скорость инвестирования.

Классическое уравнение чистых валовых инвестиций в неоклассической модели роста примет вид

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \bar{\Theta}(t).$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, получим аналог уравнения развития «идеальной» экономики с учетом освоения инвестиций [10]:

$$\frac{d\bar{v}(t)}{dt} = \bar{u}(t),$$

где  $\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \bar{v}(t) = (v_K, v_L, v_H)$  – скорость изменения факторов производства.

Введем новую величину  $\chi$  – отношение суммарных инвестиций в экономику к сумме факторов производства на

$$\chi = \frac{\Phi}{\Psi},$$

где  $\Psi = L + K + H$ ,  $\Phi = \Theta_K + \Theta_L + \Theta_H$ .

Предлагаемый показатель представляет собой относительный темп роста экономики и выводится из совокупного показателя производительности, который может находиться в диапазоне от нуля до бесконечности, но для реальных экономик это небольшая положительная величина. Рассмотрим конкретный набор изменяющихся факторов производства, преодолевающих силы сопротивления экономической среды. Ссылаясь на утверждение 3 в работе [11, с. 79–81] в предположении, что скорость изменения факторов производства зависит от времени опосредованно, через изменение самих факторов производства, найдем равенство для любого фактора производства  $K, L, H$ . Обозначим через  $p$  какой-либо из рассмотренных факторов:

$$\frac{d}{dt} \int_w \chi v_p(\bar{r}, t) dV = \int_w \operatorname{div}(\chi v_p \bar{v}) dV.$$

На изменения в элементах производства влияют темпы инвестиционного процесса в каждый момент времени, особенно в динамическом масштабе первичных факторов и устойчивости экономической ситуации, что заметно на вновь возникающих факторах, находящихся на границе динамического диапазона.

В работе [11, с. 83–84] показано, что эту концепцию можно математически проиллюстрировать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_w \chi v_p(\bar{r}, t) dV = \int_w \chi u_p dV + \int_\Gamma \bar{\sigma}_p \cdot d\bar{S},$$

где  $\bar{\sigma}_p = (\sigma_{pK}, \sigma_{pL}, \sigma_{pH})$  – противодействия развитию основных факторов производства со стороны экономической среды.

Проблемы в экономической среде приводят к различиям в темпах роста факторов производства, влияя на скорость развития по сравнению с текущим уровнем производства. Изменения в темпах развития происходят во всех факторах, что требует описания сопротивления как тензора  $\sigma_{pl}$ , где  $p$  и  $l$  – различные фундаментальные факторы производства.

Это общее сопротивление представляет собой тензор третьего порядка с размерностями (денежная единица)<sup>2</sup>/(единица времени)<sup>3</sup>.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{KK} & \sigma_{KL} & \sigma_{KH} \\ \sigma_{LK} & \sigma_{LL} & \sigma_{LH} \\ \sigma_{HK} & \sigma_{HL} & \sigma_{HH} \end{pmatrix}.$$

Из утверждения 2 в работе [11, с. 63–68] получим равенство

$$\int_w \operatorname{div}(\chi v_p \bar{v}) dV = \int_w (\chi u_p + \operatorname{div}(\bar{\sigma}_p)) dV.$$

В наших рассуждениях объем основных факторов производства был выбран произвольным образом, поэтому имеет место равенство

$$\operatorname{div}(\chi v_p \bar{v}) = \chi u_p + \operatorname{div}(\bar{\sigma}_p). \tag{1}$$

На тензор сопротивления экономической ситуации, обозначаемый как  $\sigma_{pl}$ , влияют темпы роста ключевых факторов производства и сами факторы.

Изменение этого тензора должно отражать темпы роста относительно производственных факторов, которые могут быть представлены скоростью по факторам производства  $\frac{\partial v_l}{\partial p}$ , а также некоторые связи с этими темпами и факторами.

Если градиенты скорости обновления факторов производства невелики, то для характеристики тензора можно рассматривать только исходные производные. Это ограничение естественно для экономики, так как невозможно быстрое развитие при небольших изменениях в ключевых факторах производства. Связь  $\sigma_{pl}$  с производными линейная, что обосновывается разложением в ряд Тейлора и возможностью пренебречь второстепенными значениями. Это является важнейшим ограничением при формулировании уравнения развития с учетом сопротивления экономической среды. Все первичные факторы производства идентичны; следовательно, невозможно провести различие между первичными и вторичными факторами, что требует симметричного тензора относительно производных  $\frac{\partial v_l}{\partial p}$ .

Если поддерживается постоянная скорость изменения факторов производства во времени, наличие резких изменений исключается в основных производственных факторах. Тензор становится диагональной матрицей, зависящей от скорости роста факторов производства  $\frac{\partial v_p}{\partial l}$ ,  $\frac{\partial v_l}{\partial p}$  и  $v_p v_l$ , включая таким образом члены, не связанные с этими значениями в тензоре  $\sigma_{pl}$ . Подходящее линейное уравнение, удовлетворяющее этим условиям, может состоять из этих членов с определенными коэффициентами. Рассмотрим сценарии, в которых сопротивление экономическому прогрессу изображается как линейная комбинация этих величин:

$$\sigma_{pl} = \eta \left( \frac{\partial v_l}{\partial p} + \frac{\partial v_p}{\partial l} \right) + \theta v_p v_l, \quad (2)$$

где динамический коэффициент ведения бизнеса  $\eta$  отражает связь роста ключевых факторов производства и инвестиций и имеет размерность (денежная единица)<sup>2</sup>/(единица времени)<sup>2</sup>. Вспомогательный коэффициент  $\theta$  имеет единицы измерения такие же, как и  $\chi$ , и размерность темпа изменения 1/(единица времени). Если объем инвестиций постоянен, то  $\chi = 0$  и  $\text{div}(\bar{\sigma}) = 0$ , исходное уравнение (1) превращается в тождество.

Альтернативное выражение тензора сопротивления экономической среды, удовлетворяющее данным условиям, предполагает комбинацию темпов роста факторов производства:

$$\sigma_{pl} = \left( \eta \frac{\partial v_l^2}{\partial p} + \eta \frac{\partial v_p^2}{\partial l} + \theta v_l v_p \right),$$

где  $p, l$  – разные варианты основных факторов производства.

Коэффициент  $\eta$  обладает размерностью 1/(единица времени). Более высокие значения  $\eta$  предполагают нестабильность, тогда как значения, близкие к нулю, указывают на хорошо функционирующую экономику.

Проанализируем особенности  $div(\bar{\sigma}_p)$  в первом сценарии для (2):

$$div(\bar{\sigma}_p) = div\left(\eta \frac{\partial \bar{v}}{\partial p} + \eta grad(v_p) + \theta v_p \bar{v}\right).$$

Окончательно имеем

$$div\left(\gamma v_p \bar{v} - \eta \frac{\partial \bar{v}}{\partial p} - \eta grad(v_p)\right) = \chi u_p, \quad (3)$$

где  $\gamma = \chi - \theta$ ;  $p$  – один из основных факторов производства.

Уравнение (3) представляет собой самую широкую версию векторного уравнения, которое описывает экономический рост с учетом сопротивления экономической среды. Разберем сценарий, в котором коэффициент ведения бизнеса остается кусочно-постоянным, т.е.  $\eta = const$ .

После ряда преобразований получим общий вид системы уравнений развития экономики с учетом сопротивления экономической среды с кусочно-постоянным коэффициентом ведения бизнеса:

$$\gamma \frac{dv_p}{dt} - \eta \Delta v_p - \eta div\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p}\right) = \chi u_p,$$

где  $\Delta v_p = \frac{\partial^2 v_p}{\partial L^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial K^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial H^2}$  – оператор Лапласа.

Эластичность замены природных ресурсов трудовыми или основными фондами равна нулю, как и невозможно заменить природные ресурсы другими основными факторами производства. Поэтому в нашей системе пропадают слагаемые, связанные с природными ресурсами  $\frac{\partial K}{\partial H} = 0, \frac{\partial L}{\partial H} = 0, \frac{\partial H}{\partial K} = 0, \frac{\partial H}{\partial L} = 0$ . В свою очередь трудовые ресурсы по основным фондам и наоборот обладают ненулевой эластичностью и поэтому  $\frac{\partial K}{\partial L} \neq 0, \frac{\partial L}{\partial K} \neq 0$ .

Кроме того, слагаемое  $div\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial p}\right) = 0$ . Таким образом наша задача сводится к двумерной по переменным  $K$  и  $L$ .

Если коэффициент  $\theta = 0$ , т.е. тензор сопротивления описывается только производными от скорости изменения факторов производства по самим факторам, а  $\chi$  зависит от факторов производства, но остается независимым от времени, то уравнение (3) будет иметь следующую структуру:

$$\frac{dv_p}{dt} - \frac{\eta}{\chi} \Delta v_p = u_p,$$

где  $p$  принимает одно из значений  $K, L, \bar{v} = (v_k, v_L), \Delta v_p = \frac{\partial^2 v_p}{\partial L^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial K^2}$ .

Новая система уравнений экономического роста включает в себя тензор сопротивления экономической структуры и является одной из разновидностей уравнения Навье–Стокса. В общем случае коэффициент ведения биз-

неса зависит от времени, но эту зависимость предлагается обходить заменой на кусочно-постоянную. Сложность решения уравнения Навье–Стокса сделала его одной из самых сложных математических задач XXI в. [12], а в работе О.А. Ладыженской [13] подробно описаны различные точки зрения на его решение на основе гладкости.

Путем расчета частных производных и объединения членов возникает окончательная система, связывающая уравнения экономического развития с тензором экономического сопротивления. Эту систему дополним уравнением освоения инвестиций для дальнейшего анализа:

$$\begin{cases} \frac{dv_p}{dt} - \mu \Delta v_p = u_p, \\ \frac{d\bar{u}(t)}{dt} = \rho(\bar{J}(t) - \bar{u}(t)), \end{cases} \quad (4)$$

где  $p$  – один из главных факторов производства ( $L, K$ ),  $\Delta \bar{v} = (\Delta v_L, \Delta v_K)$ ,  $\Delta v_p = \frac{\partial^2 v_p}{\partial L^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial K^2}$  – оператор Лапласа;  $\mu = \frac{\eta}{\chi}$  – коэффициент экономического состояния среды, имеющий размерность (денежная единица)/(единица времени)<sup>3</sup>.

Система (3) показывает, как ведет себя экономика, когда инвестиции осваиваются с запаздыванием, а коэффициент ведения бизнеса зависит исключительно от времени.

Распишем подробно систему (3)

$$\begin{cases} \frac{dv_K}{dt} - \mu \frac{\partial^2 v_K}{\partial L^2} = u_K, \\ \frac{dv_L}{dt} - \mu \frac{\partial^2 v_L}{\partial K^2} = u_L, \\ \frac{d\bar{\Theta}(t)}{dt} = \rho(\bar{I}(t) - \bar{\Theta}(t)). \end{cases} \quad (5)$$

Теперь остановимся на втором сценарии для данного тензора сопротивления среды  $\sigma_{pl} = \left( \eta \frac{\partial v_l^2}{\partial p} + \eta \frac{\partial v_p^2}{\partial l} + \theta v_l v_p \right)$ , где  $p, l$  – некоторые факторы производства.

$$\text{div}(\bar{\sigma}_p) = \text{div} \left( \eta \frac{\partial \bar{a}}{\partial p} + \eta \text{grad}(v_p^2) + \theta v_p \bar{v} \right),$$

где  $\bar{a} = (v_K^2, v_L^2, v_H^2)$ .

Окончательно имеем

$$\text{div} \left( \gamma v_p \bar{v} - \eta \frac{\partial \bar{a}}{\partial p} - \eta \text{grad}(v_p^2) \right) = \chi u_p, \quad (6)$$

где  $\gamma = \chi - \theta$ .

Если коэффициент ведения бизнеса – величина кусочно-постоянная, т.е.  $\eta = \text{const}$  и  $\theta = 0$ , выражение (6) примет вид

$$\frac{dv_p}{dt} - \mu \Delta v_p^2 = u_p \quad (7)$$

и уравнение (7) будет отличаться от первого уравнения (4) тем, что оно включает в себя оператор Лапласа от квадрата скорости изменения факторов производства. Уравнения в частных производных (3) предполагают бесконечно много решений. Чтобы определить конкретное решение, имеющее отношение к нашей проблеме, необходимо включить в модель начальные и граничные условия. Эти условия обычно охватывают конфигурацию экономики, граничные характеристики и временные аспекты. Текущей проблемой остается отсутствие однозначного решения относительно существования и уникальности решения комплексной системы уравнений экономического развития.

Полученная система уравнений с различными начальными данными и краевыми условиями, по-видимому, будет некорректной, так как многочисленные попытки доказать корректность ряда задач для уравнения Навье–Стокса (в частности, теоремы существования и единственности в трехмерном случае) оказались безрезультатными.

Раньше считалось, что уравнения, дающие решения вблизи некоторой точки без существования решения в целом, бессмысленны. Однако постоянно возникающие проблемы требуют изучения таких некорректных постановок задач. Ж. Лере предположил, что возникающие трудности связаны с внутренними особенностями этих уравнений, а не с недостатками математического инструментария (цит. по [14]). Например, одной из таких проблем может быть неединственность решений уравнения Навье–Стокса. Один из подходов к решению этих проблем предполагает рассмотрение незначительных возмущений и случайных процессов в экономической системе. Тем не менее усложнение экономического анализа такими элементами может привести к неблагоприятным результатам на нынешнем уровне развития математики.

## Заключение

В данной статье было проведено математическое моделирование развития основных факторов производства в национальной экономике с учетом влияния сопротивления экономической среды. Были представлены уравнения в частных производных от основных факторов производства и концепция тензора экономического сопротивления среды, которые учитывают воздействие внешних и внутренних факторов на развитие экономики. Коэффициенты в тензоре сопротивления включают в себя учет таких факторов, как налоговая политика, конкуренция и банковская система, а также другие факторы влияния национальной экономики.

В систему включены уравнения, которые связывают скорость освоения инвестиций и скорость изменения основных факторов производства в экономическом объекте. Эти уравнения позволяют учесть воздействие

запаздывания в освоении инвестиций. Анализ связи между скоростью инвестирования и скоростью освоения инвестиций позволяет лучше понять динамику экономического развития и выявить факторы, оказывающие наибольшее влияние на этот процесс.

В статье предложена новая система уравнений экономического роста, где используется тензор сопротивления, аналогичный тензору в уравнении Навье–Стокса.

Следует отметить, что полученное уравнение вписывается в классическую теорию экономического роста. Если предположить, что в уравнениях (5) и (6) сопротивление экономической среды отсутствует  $\mu = 0$ , а инвестиции мгновенно осваиваются, то получаем классическое уравнение прироста факторов производства от объема инвестиций. Частные случаи системы (4), представленные в виде систем уравнений в частных производных (5) и (6), требуют дальнейшего изучения и могут дать интересные результаты. Также остается открытым вопрос получения или подбора коэффициентов в тензоре сопротивления экономической среды.

Эта работа подчеркивает важность математического моделирования для понимания развития основных факторов производства в национальной экономике. Учет влияния сопротивления экономической среды помогает улучшить представление о динамике экономического роста и выявить факторы, оказывающие наибольшее воздействие на этот процесс.

#### Список источников

1. Кузнецов С.Б. Определение сопротивления экономической среды // Мир экономики и управления. 2017. Т. 17, № 4. С. 71–83.
2. Хансен Э. Экономические циклы и национальный доход. М.: Директ-Медиа, 2007. С. 644. URL: <https://www.direct-media.ru/> (дата обращения: 11.03.2024).
3. Easterly William, Levin Ross. This is not the accumulation of factors of production: stylized facts and growth patterns. Economic review of the World Bank. © Washington, DC: World Bank. 2001. URL: <http://hdl.handle.net/10986/17440> (дата обращения: 11.03.2024).
4. Thorvaldur Gylfason Nature, Power and Growth. URL: <https://doi.org/10.1111/1467-9485.00215> (дата обращения: 11.03.2024).
5. Jan Fagerberg & Martin Srhoec, 2005. Catching up: What are the critical success factors?, Innovation Research Working Papers 20050401, Center for Technology, Innovation and Culture, University of Oslo. URL: <https://ideas.repec.org/p/tik/inowpp/20050401.html>
6. Besley T. and Persson T. The Causes and Consequences of Development Clusters: State Capacity, Peace, and Income. URL: <https://doi.org/10.1146/annurev-economics-080213-041128> (дата обращения: 11.03.2024).
7. Alesina Alberto F. Why Certain Countries Have Developed and Others Have Not? American Economic Association, Ten Years and Beyond: Economists Answer NSF's Call for Long-Term Research Agendas, URL: <https://ssrn.com/abstract=1888513> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1888513> (дата обращения: 11.03.2024).
8. Acemoglu D., Robinson J.A. Rents and economic development: the perspective of Why Nations Fail. Public Choice. 2019. Vol. 181. Pp. 13–28. URL: <https://doi.org/10.1007/s11127-019-00645-z> (дата обращения: 11.03.2024).
9. Delgado M., Ketels C., Porter M.E. & Stern S. The Determinants of National Competitiveness. URL: <https://nber.org/papers/w18249> (дата обращения: 11.03.2024).

10. Кузнецов С.Б. Математическая модель влияния экономической среды на факторы производства // Международный научно-исследовательский журнал. 2016. № 8 (50). Ч. 1. С. 58–60. URL: <https://research-journal.org/archive/8-50-2016-august/matematiceskaya-model-vliyaniya-ekonomicheskoy-sredy-na-factory-proizvodstva>. doi: 10.18454/IRJ.2016.50.193 (дата обращения: 11.03.2024).
11. Кузнецов С.Б. Динамика обновления факторов производства. Новосибирск: Изд-во СИБПРИНТ, 2010. 312 с.
12. Smile S. Mathematical problems for next century // *Mathematical Intelligencer*. 1998. Vol. 20. P. 7–15.
13. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость // *Успехи мат. наук*. 2003. Т. 58, № 2. С. 45–78.
14. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. М.: КомКнига, 2005. С. 14.

### References

1. Kuznecov S.B. Opredelenie soprotivlenija jekonomicheskoy sredy [Determination of the resistance of the economic environment], *Mir jekonomiki i upravlenija [World of Economics and Management]*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 71–83.
2. Hansen Je. Jekonomicheskie cikly i nacional'nyj dohod [Economic cycles and national income]. Moscow, Direkt-Media, 2007, pp. 644. Available at: <https://www.direct-media.ru/> (accessed: 11.03.2024).
3. Easterly William, Levin Ross. This is not the accumulation of factors of production: stylized facts and growth patterns. *Economic review of the World Bank*. © Washington, DC: World Bank. 2001. Available at: <http://hdl.handle.net/10986/17440> (accessed: 11.03.2024).
4. Thorvaldur Gylfason Nature, Power and Growth. Available at: <https://doi.org/10.1111/1467-9485.00215> (accessed: 11.03.2024).
5. Jan Fagerberg & Martin Srholec, 2005. Catching up: What are the critical success factors?, *Innovation Research Working Papers 20050401*, Center for Technology, Innovation and Culture, University of Oslo. Available at: <https://ideas.repec.org/p/tik/inowpp/20050401.html>
6. Besley T. and Persson T. The Causes and Consequences of Development Clusters: State Capacity, Peace, and Income. Available at: <https://doi.org/10.1146/annurev-economics-080213-041128> (accessed: 11.03.2024).
7. Alesina Alberto F. Why Certain Countries Have Developed and Others Have Not? *American Economic Association, Ten Years and Beyond: Economists Answer NSF's Call for Long-Term Research Agendas*, Available at: <https://ssrn.com/abstract=1888513> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1888513> (accessed: 11.03.2024).
8. Acemoglu D., Robinson J.A. Rents and economic development: the perspective of Why Nations Fail. *Public Choice*. 2019. Vol. 181. Pp. 13–28. Available at: <https://doi.org/10.1007/s11127-019-00645-z> (accessed: 11.03.2024).
9. Delgado M., Ketels C., Porter M.E. & Stern S. The Determinants of National Competitiveness Available at: <https://nber.org/papers/w18249> (accessed: 11.03.2024).
10. Kuznecov S.B. Matematicheskaja model' vlijaniija jekonomicheskoy sredy na factory proizvodstva [Mathematical model of the influence of the economic environment on production factors], *Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal [International scientific research journal]*, 2016, no. 8 (50), iss. 1, pp. 58–60. Available at: <https://research-journal.org/archive/8-50-2016-august/matematiceskaya-model-vliyaniya-ekonomicheskoy-sredy-na-factory-proizvodstva>. doi: 10.18454/IRJ.2016.50.193 (accessed: 11.03.2024).
11. Kuznecov S.B. Dinamika obnovlenija faktorov proizvodstva [Dynamics of renewal of production factors]. *Novosibirsk, CPI, Izd-vo SIBPRINT*, 2010. 312 p.

12. Smile S. Mathematical problems for next century. *Mathematical Intelligencer*. 1998. Vol. 20. Pp. 7–15.
13. Ladyzhenskaja O.A. Shestaja problema tysjacheletija: uravnenija Nav’e–Stoksa, su-shhestvovanie i gladkost’ [The sixth problem of the millennium: Navier–Stokes equations, existence and smoothness], *Uspehi mat. nauk [Advances in Mathematical Sciences]*, 2003, vol. 58, no. 2, pp. 45–78.
14. Malineckij G.G. Matematicheskie osnovy sinergetiki. Haos. Struktury. Vychislitel’nyj jeksperiment [Mathematical foundations of synergetics. Chaos. Structures. Computational experiment]. Moscow, KomKniga, 2005. P. 14.

**Сведения об авторе:**

**С.Б. Кузнецов** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и естественных наук, Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИИХ», главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории устойчивого развития социально-экономических систем, Сибирский институт управления – филиал РАНХиГС, Новосибирск, Российская Федерация.

**Information about the author:**

**S.B. Kuznetsov** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Natural Sciences, Novosibirsk State University of Economics and Management, Chief Researcher, Research Laboratory “Sustainable Development of Socio-Economic Systems”, Siberian Institute of Management – branch of RANEPА, Novosibirsk, Russian Federation.

<i>Статья поступила в редакцию</i>	<i>20.03.2024</i>	<i>The article was submitted</i>	<i>20.03.2024</i>
<i>Одобрена после рецензирования</i>	<i>28.04.2024</i>	<i>Approved after reviewing</i>	<i>28.04.2024</i>
<i>Принята к публикации</i>	<i>28.04.2024</i>	<i>Accepted for publication</i>	<i>28.04.2024</i>