

Вестник НГУЭУ. 2024. № 3. С. 107–120

Vestnik NSUEM. 2024. No. 3. P. 107–120

Научная статья

УДК 33.06; 51-7

DOI: 10.34020/2073-6495-2024-3-107-120

ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО ПОРТФЕЛЯ АКЦИЙ В СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ МАРКОВИЦА

Зотьев Дмитрий Борисович¹, Соколов Вячеслав Евгеньевич²

^{1,2} Новосибирский государственный университет
экономики и управления «НИИХ»

¹ zotev@inbox.ru

² slava.sokolov1999@mail.ru

Аннотация. В статье приводятся явные формулы для параметров эффективного портфеля акций, полученные на основании теории Марковица, в том числе для модели Тобина. Выполнена эмпирическая проверка, подтвердившая правильность полученных формул. Последние могут оказаться полезными при теоретических исследованиях, связанных с эффективными портфелями ценных бумаг, а также при разработке компьютерных программ, связанных с анализом инвестиций и фондового рынка.

Ключевые слова: теория Марковица, оптимальный портфель, модель Тобина, акции, диверсифицированный портфель, инвестиционный риск

Для цитирования: Зотьев Д.Б., Соколов В.Е. Явные формулы для эффективного портфеля акций в стандартной модели Марковица // Вестник НГУЭУ. 2024. № 3. С. 107–120. DOI: 10.34020/2073-6495-2024-3-107-120.

Original article

EXPLICIT FORMULAS FOR AN EFFECTIVE STOCKS PORTFOLIO IN THE MARKOWITZ'S STANDARD MODEL

Zoteyev Dmitry B.¹, Sokolov Vyacheslav E.²^{1,2} *Novosibirsk State University of Economics and Management*¹ zotey@inbox.ru² slava.sokolov1999@mail.ru

Abstract. The article provides explicit formulas for the parameters of an effective stock portfolio obtained based on Markowitz's theory, including for the Tobin's Model. An empirical test was performed and confirmed the correctness of the obtained formulas. They can be useful in theoretical studies related to effective securities portfolios, as well as in the development of computer programs for analysing investments and the stock market.

Keywords: Markowitz's theory, optimal portfolio, Tobin's model, stocks, diversified portfolio, investment risk

For citation: Zoteyev D.B., Sokolov V.E. Explicit formulas for an effective stocks portfolio in the Markowitz's standard model. *Vestnik NSUEM*. 2024; (3): 107–120. (In Russ.). DOI: 10.34020/2073-6495-2024-3-107-120.

1. Введение

При инвестировании в акции или иные волатильные активы инвестор рассчитывает на получение максимальной прибыли и стремится минимизировать риск убытков. Хорошо известно, что эти две цели противоречат друг другу. Средством для достижения компромисса является диверсифицированный портфель акций. Данный термин обозначает некоторое распределение инвестиционного капитала между акциями различных эмитентов, так что на покупку акций каждого эмитента из представленных в «портфеле» расходуется определенная доля инвестируемых средств. Эти доли являются параметрами портфеля, которые следует оптимизировать. Точное определение такой оптимизации было дано в 1952 г., когда сотрудник Rand Corporation Г. Марковиц опубликовал статью [3]. В ней он определил риск инвестора как среднеквадратическое отклонение доходности и предложил считать оптимальным тот портфель, который при желаемой доходности имеет минимальный риск. Он также описал метод вычисления параметров портфеля, состоящего из акций трех эмитентов. Идеи Марковица получили дальнейшее развитие и нашли применение в практике фондовых инвестиций, за что автор был удостоен Нобелевской премии по экономике за 1990 г.

Теоретической основой и предметом настоящей статьи является так называемая стандартная модель Марковица [4], которая заключается в следующем. Для некоторого числа $k > 1$ запишем $X_1, X_2, \dots, X_k$ – случайные величины, принимающие значения доходностей вложения в акции эмитентов № 1, 2, ..., k (доходности рассчитываются на единицу вложенных средств); $p_1, p_2, \dots, p_k$ – доли инвестируемой суммы, вкладываемые в акции

№ 1, 2, ..., k соответственно. Тогда доходность портфеля выражается случайной величиной

$$X = p_1 X_1 + p_2 X_2 + \dots + p_k X_k. \quad (1)$$

Математическое ожидание прибыли (т.е. ее среднее значение) дано выражением:

$$E(X) = p_1 E(X_1) + p_2 E(X_2) + \dots + p_k E(X_k).$$

Обозначим $\bar{x}_i = E(X_i)$ – математическое ожидание и $\sigma_i^2 = \sigma^2(X_i)$ – дисперсия случайной величины X_i , где $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда $E(X) = p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 + \dots + p_k \bar{x}_k$ и

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \cdot p_i^2 + 2 \sum_{i < j} r_{ij} \sigma_i \sigma_j \cdot p_i p_j}, \quad (2)$$

где r_{ij} – коэффициент корреляции между X_i и X_j . Предположим, что ожидаемая доходность портфеля равна некоторому P , т.е.

$$p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 + \dots + p_k \bar{x}_k - P = 0. \quad (3)$$

Также должно быть выполнено условие

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1. \quad (4)$$

Таким образом, для того чтобы при заданной доходности портфеля P минимизировать риск $\sigma(X)$, нужно решить задачу оптимизации

$$\sqrt{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \cdot p_i^2 + 2 \sum_{i < j} r_{ij} \sigma_i \sigma_j \cdot p_i p_j} \rightarrow \min$$

при ограничениях (3) и (4) на переменные $p_i \geq 0$.

В работе [4] была описана компактная область в $\mathbb{R}^2$ с координатами σ, P , которая отвечает всевозможным портфелям $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ с доходностью P и риском σ . Значение σ определяется из (2), при этом все $p_i \geq 0$ и выполнены условия (3), (4). Соответствующее множество точек (σ, P) в $\mathbb{R}^2$ называется *областью достижимости* или областью осуществимости (портфеля). Марковиц описал границу этой области, которая в координатах σ, P состоит из дуг парабол и, возможно, горизонтальных или вертикальных отрезков, примыкающих друг к другу непрерывно, но не всегда гладко [4]. Некоторые из этих дуг и/или отрезков состоят из точек (σ, P) , отвечающих *эффективным портфелям*. Эти точки характеризуются тем, что нельзя ни уменьшить риск σ при неизменной доходности P , ни увеличить доходность при неизменном риске, так чтобы полученная в результате точка не вышла за пределы области достижимости. Портфелям, которые отвечают решениям $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ поставленной выше задачи оптимизации, отвечают точки (σ, P) в $\mathbb{R}^2$, лежащие на так называемой кривой Марковица. Последняя представляет собой гиперболу. Сегмент этой гиперболы, попадающий в область достижимости, отвечает оптимальным портфелям. Назовем его *эффективной кривой Марковица*. Настоящая статья посвяще-

на явному и точному вычислению этой кривой для портфеля из любого числа акций. По-видимому, такого рода формулы прежде никем не выводились. Например, К.В. Криничанский и А.В. Безруков пишут: «Авторам неизвестны случаи изложения в литературе подходов к построению в явном виде функциональной зависимости СКО портфеля от его доходности» [2, с. 115]. Эта функциональная зависимость $\sigma = \sigma(P)$ построена в настоящей статье. К.В. Криничанский и А.В. Безруков также подвергли сомнению тот факт, что эффективная кривая Марковица является частью гиперболы. Однако из результатов настоящей статьи видно, что все-таки она – сегмент гиперболы. В статье также представлен эмпирический расчет кривой Марковица, который позволил проверить корректность полученных в ней точных формул.

2. Явные формулы для стандартной модели Марковица

В соответствии с методом Лагранжа введем функцию

$$\begin{aligned} \Phi(p_1, p_2, \dots, p_k, \lambda, \mu) = \\ = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \cdot p_i^2 + 2 \sum_{i < j}^k r_{ij} \sigma_i \sigma_j \cdot p_i p_j - \lambda(p_1 \bar{x}_1 + \dots + p_k \bar{x}_k - P) - \mu(p_1 + \dots + p_k - 1), \end{aligned}$$

где λ и μ – неопределенные множители Лагранжа. Приравниваем нулю производные функции $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_k, \lambda, \mu)$ по переменным p_i :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_l} = 2\sigma_l^2 p_l + 2 \sum_{i \neq l}^k r_{il} \sigma_i \sigma_l p_i - \lambda \bar{x}_l - \mu = 0.$$

Поскольку $r_{//}=1$, из последнего уравнения следует

$$\sum_{i=1}^k r_{il} \sigma_i p_i = \frac{\lambda \bar{x}_l + \mu}{2\sigma_l}. \quad (5)$$

Введем числа α_i, β_i , являющиеся решениями систем уравнений (6) и (7), где $i = 1, 2, \dots, k$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + r_{12}\alpha_2 + r_{13}\alpha_3 + \dots + r_{1,k-1}\alpha_{k-1} + r_{1k}\alpha_k = \frac{\bar{x}_1}{\sigma_1}, \\ r_{21}\alpha_1 + \alpha_2 + r_{23}\alpha_3 + \dots + r_{2,k-1}\alpha_{k-1} + r_{2k}\alpha_k = \frac{\bar{x}_2}{\sigma_2}, \\ r_{31}\alpha_1 + r_{32}\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + r_{3,k-1}\alpha_{k-1} + r_{3k}\alpha_k = \frac{\bar{x}_3}{\sigma_3}, \\ \dots\dots\dots \\ r_{k1}\alpha_1 + r_{k2}\alpha_2 + r_{k3}\alpha_3 + \dots + r_{k,k-1}\alpha_{k-1} + \alpha_k = \frac{\bar{x}_k}{\sigma_k}; \end{array} \right. \quad (6)$$

[illegible]

Ясно, что $r_{ij} = r_{ji}$. Предполагается, что

$$\begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1,k-1} & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2,k-1} & r_{2k} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \dots & r_{3,k-1} & r_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \dots & r_{k,k-1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому наборы чисел α_i, β_i существуют и единственны. Из систем уравнений (5), (6) и (7)

$$p_i = \frac{\alpha_i}{2\sigma_i}\lambda + \frac{\beta_i}{2\sigma_i}\mu. \quad (8)$$

Из уравнений (3) и (8) получаем:

$$\mu = \frac{2P - \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} \bar{x}_j \lambda}{\sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \bar{x}_j},$$

$$p_i = \left(\frac{\alpha_i}{2\sigma_i} - \frac{\beta_i}{2\sigma_i} \cdot \frac{\sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \bar{x}_j} \right) \lambda + \frac{\beta_i}{\sigma_i \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \bar{x}_j} P. \quad (9)$$

Тогда из уравнений (4) и (9):

$$\left(\sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{2\sigma_j} - \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{2\sigma_j} \cdot \frac{\sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \bar{x}_j} \right) \lambda + \frac{\sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j}}{\sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \bar{x}_j} P = 1,$$

$$\lambda = 2 \frac{\sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} (\bar{x}_j - P)}{\sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \bar{x}_j - \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} \bar{x}_j}. \quad (10)$$

Из уравнений (9) и (10) следует, что

$$p_i = \left(\frac{\alpha_i}{\sigma_i} - \frac{\beta_i}{\sigma_i} \cdot \frac{\sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \bar{x}_j} \right) \cdot \frac{\sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} (\bar{x}_j - P)}{\sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \bar{x}_j - \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} \bar{x}_j} + \frac{\beta_i}{\sigma_i \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \bar{x}_j} P.$$

Отсюда вытекает следующее выражение для искомых параметров:

$$p_i = A_i P + B_i. \quad (11)$$

$$A_i = \frac{\frac{\beta_i}{\sigma_i} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} - \frac{\alpha_i}{\sigma_i} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j}}{\sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \bar{x}_j - \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} \bar{x}_j},$$

$$B_i = \frac{\frac{\alpha_i}{\sigma_i} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \bar{x}_j - \frac{\beta_i}{\sigma_i} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \bar{x}_j - \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{\sigma_j} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\sigma_j} \bar{x}_j}.$$

Легко проверить, что из (3), (4) и (11) вытекают равенства:

$$\sum_{i=1}^k A_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^k B_i = 1, \quad \sum_{i=1}^k A_i = \sum_{i=1}^k B_i \bar{x}_i = 0. \quad (12)$$

Теперь вычислим риск портфеля в силу уравнения (2):

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \cdot (A_i P + B_i)^2 + 2 \sum_{i < j} r_{ij} \sigma_i \sigma_j \cdot (A_i P + B_i)(A_j P + B_j) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 A_i^2 + 2 \sum_{i < j} r_{ij} \sigma_i \sigma_j A_i A_j \right) P^2 + \\ &+ 2 \left(\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 A_i B_i + \sum_{i < j} r_{ij} \sigma_i \sigma_j (A_i B_j + A_j B_i) \right) P + \\ &+ \left(\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 B_i^2 + 2 \sum_{i < j} r_{ij} \sigma_i \sigma_j B_i B_j \right). \end{aligned}$$

Запишем это уравнение в сокращенном виде $\sigma^2 = AP^2 + 2BP + C$, где

$$A = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 A_i^2 + 2 \sum_{i<j}^k r_{ij} \sigma_i \sigma_j A_i A_j, \quad C = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 B_i^2 + 2 \sum_{i<j}^k r_{ij} \sigma_i \sigma_j B_i B_j,$$

$$B = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 A_i B_i + \sum_{i<j}^k r_{ij} \sigma_i \sigma_j (A_i B_j + A_j B_i).$$

Окончательно получаем формулу

$$\sigma = \sqrt{AP^2 + 2BP + C}. \quad (13)$$

Уравнение (13) выражает зависимость риска σ от ожидаемой доходности P . Ясно, что кривая (13) является гиперболой. Так получается кривая Марковица, из которой нужно выделить эффективную кривую. Последняя в дополнение к (13) определяется системой неравенств:

$$P \geq -B/A, \quad P \geq 0, \quad A_i P + B_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (14)$$

Первое из неравенств (14) выделяет часть гиперболы, расположенную выше ее оси симметрии (в плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами σ, P). Из (12) видно, что среди чисел A_i найдется отрицательное. Поэтому множество чисел P , являющихся решениями системы (14), представляет отрезок числовой оси, который обозначим $[P_-; P_+]$, где $P_- \geq 0$. Эффективная кривая Марковица является сегментом гиперболы (13), который определяется условием $P_- \leq P \leq P_+$.

Если для какого-то набора акций оказалось, что система (14) не имеет решения относительно P , то на кривой Марковица нет эффективных портфелей из этих акций. В таком случае эффективные портфели следует искать на других сегментах границы области достижимости в $\mathbb{R}^2(\sigma, P)$ [4].

3. Явные формулы для модели Марковица – Тобина

Предположим, что в состав портфеля также входят активы с фиксированной, средневзвешенной доходностью p_0 (например, гос. облигации или банковские депозиты).

Соответствующую задачу первым исследовал Дж. Тобин [5]. Тогда доходность портфеля

$$X = p_0 X_0 + p_1 X_1 + p_2 X_2 + \dots + p_k X_k. \quad (15)$$

При этом, как и прежде, должны быть выполнены следующие условия:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1, \quad (16)$$

$$p_0 x_0 + p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 + \dots + p_k \bar{x}_k - P = 0, \quad (17)$$

где $x_0 = E(X_0) = X_0 = \text{const}$ – фиксированная доходность безрисковых активов.

Поскольку слагаемое $p_0 X_0$ является константой, а не случайной величиной, среднеквадратическое отклонение доходности X по-прежнему выра-

жается формулой (2). Для того чтобы при желаемой доходности портфеля P минимизировать риск $\sigma(X)$, нужно решить задачу оптимизации

$$\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \cdot p_i^2 + 2 \sum_{i < j}^k r_{ij} \sigma_i \sigma_j \cdot p_i p_j \rightarrow \min$$

при ограничении (17) на переменные $p_i \geq 0$. Переменные данной задачи – параметры $p_1, p_2, \dots, p_k$, а параметр p_0 выражается из (16), так что $p_0 = 1 - p_1 - \dots - p_k$. Функция Лагранжа теперь выглядит так:

$$\begin{aligned} \Phi(p_1, p_2, \dots, p_k, \lambda) = \\ = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \cdot p_i^2 + 2 \sum_{i < j}^k r_{ij} \sigma_i \sigma_j \cdot p_i p_j - \lambda(p_1 \bar{x}_1 + \dots + p_k \bar{x}_k + (p_0 x_0 - P)), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p_l} = 2 \sigma_l^2 p_l + 2 \sum_{i \neq l}^k r_{il} \sigma_i \sigma_l p_i - \lambda(\bar{x}_l - x_0) = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $r_{ii} = \sigma_i^2$, получаем систему линейных уравнений относительно p_i :

$$\sum_{i=1}^k r_{ij} \sigma_i \sigma_j \cdot p_i = \frac{\lambda(\bar{x}_j - x_0)}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (18)$$

Сравнивая системы уравнений (18) и (5), легко видеть, что решение системы (18) выводится из формулы (8) заменой $\mu = -\lambda x_0$. В результате

$$p_i = \frac{\lambda}{2 \sigma_i} (\alpha_i - \beta_i x_0). \quad (19)$$

Теперь выразим риск, используя (18) и (19):

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i,j=1}^k r_{ij} \sigma_i \sigma_j p_i p_j} = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^k r_{ij} (\alpha_i - \beta_i x_0)(\alpha_j - \beta_j x_0)}. \quad (20)$$

Из (16), (17) и (18) получаем:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^k r_{ij} \sigma_i \sigma_j \cdot p_i p_j} = \sqrt{\sum_{j=1}^k \frac{\lambda(\bar{x}_j - x_0)}{2} \cdot p_j} = \sqrt{\frac{\lambda}{2} \cdot \sum_{j=1}^k \bar{x}_j p_j - \frac{\lambda}{2} \cdot x_0 \cdot \sum_{j=1}^k p_j} = \\ &= \sqrt{\frac{\lambda}{2} (P - p_0 x_0) - \frac{\lambda}{2} x_0 (1 - p_0)} = \sqrt{\frac{\lambda}{2} (P - x_0)}, \\ \sigma^2 &= \frac{\lambda}{2} (P - x_0). \end{aligned} \quad (21)$$

Разделив уравнение (21) на уравнение (20), выразим минимальный риск через доходность

$$\sigma = \frac{P - x_0}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^k r_{ij} (\alpha_i - \beta_i x_0)(\alpha_j - \beta_j x_0)}}. \quad (22)$$

Уравнение (22) описывает прямую в плоскости $\mathbb{R}^2(\sigma, P)$. Видно, что $P \geq x_0$. Из (21) и (22) вычисляется значение множителя Лагранжа

$$\lambda = \frac{2\sigma^2}{P - x_0} = \frac{2(P - x_0)}{\sum_{i,j=1}^k r_{ij}(\alpha_i - \beta_i x_0)(\alpha_j - \beta_j x_0)}. \quad (23)$$

Отсюда и из (19) параметры эффективного портфеля выражаются формулой

$$p_i = \frac{(P - x_0)(\alpha_i - \beta_i x_0)}{\sigma_i \cdot \sum_{i,j=1}^k r_{ij}(\alpha_i - \beta_i x_0)(\alpha_j - \beta_j x_0)} \quad (24)$$

при условии, что правые части уравнений (23) неотрицательны при всех $i = 1, 2, \dots, k$. Очевидно, что портфель с безрисковым активом имеет смысл конструировать только при $P \geq x_0$. В этом случае из (21) вытекает, что $\lambda \geq 0$ и вследствие (23) и (24) должно быть выполнено

$$\beta_i x_0 \leq \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (25)$$

Условие $p_0 \geq 0$ равносильно $\sum_{i=1}^k p_i \leq 1$. Отсюда и из (24) при условии (25) получаем диапазон (26) значений ожидаемой доходности, выделяющий на прямой (22) отрезок, который отвечает эффективным портфелям по Марковицу – Тобину:

$$x_0 \leq P \leq x_0 + \frac{\sum_{i,j=1}^k r_{ij}(\alpha_i - \beta_i x_0)(\alpha_j - \beta_j x_0)}{\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i - \beta_i x_0}{\sigma_i}}. \quad (26)$$

4. Эмпирическая проверка

Стандартная модель Марковица непосредственно применима лишь в том случае, когда доходности акций являются случайными величинами с законом распределения, который можно считать не зависящим от времени. Другими словами, случайные процессы $X_i = X_i(t)$, выражающие доходности акций в моменты времени t , должны быть стационарными. На практике трудно проверяемое условие стационарности заменяют несколько более слабым, которое состоит в том, что математическое ожидание $m_i = E(X_i(t))$ не зависит от t , а корреляционная функция $K_{X_i}(t_1, t_2)$ зависит только от $t_2 - t_1$, т.е. $K_{X_i}(t_1, t_2) = k_i(t_2 - t_1)$ для некоторой функции $k_i(\tau)$ [1]. С экономической точки зрения это означает, что фондовый рынок должен быть достаточно стабильным хотя бы в отношении акций искомого, эффективного портфеля на протяжении всего периода времени, к которому относится статистика и прогноз.

Однако условия стационарности процессов $X_i(t)$ недостаточно для того, чтобы использовать в модели Марковица статистику доходностей акций, полученную из временных рядов. Легко понять, что для корректного извлечения из такой статистики средних доходностей коэффициентов r_{ij} (корреляция между X_i и X_j), стационарные процессы $X_i(t)$ должны быть

эргодическими [1]. Необходимым условием эргодичности стационарного процесса $X_i(t)$ является стремление к нулю корреляционной функции $k_i(\tau)$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Последнее означает, что доходности $X_i(t_1)$ и $X_i(t_2)$ почти не коррелируют между собой, если моменты времени t_1 и t_2 далеки друг от друга. Это условие выглядит естественно при рассмотрении длительного периода времени. Например, ежемесячные доходности акций наблюдаются на протяжении десяти лет. Но получить длительную, почти стационарную статистику доходностей нужных акций далеко не всегда возможно.

Некритическое использование статистики временных рядов для получения статистических оценок коэффициентов корреляции r_{ij} может привести к ложному выводу о наличии корреляции в той ситуации, когда ее на самом деле нет. Предположим, что доходности X_i и X_j акций № i и j имеют приблизительно линейную зависимость от времени t , так что $X_i(t) \approx a_i + b_i t$ и $X_j(t) \approx a_j + b_j t$. Измеряя доходности в дискретные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$, получим временные ряды $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ и $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}$. Так как $t_k \approx (x_{ik} - a_i)/b_i$, то для каждого $k = 1, 2, \dots, n$:

$$x_{jk} \approx b_j(x_{ik} - a_i)/b_i + a_j = \frac{b_j}{b_i} \cdot x_{ik} + \left(a_j - \frac{b_j a_i}{b_i} \right).$$

Таким образом, между временными рядами имеет место приблизительно линейная зависимость, которая отражается в близком к ± 1 значении коэффициента r_{ij} . Между тем случайные компоненты этих временных рядов могут оказаться независимыми между собой, так что коэффициент их корреляции будет близким к нулю. Поэтому вывод о коррелированности случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ не имел бы под собой реальных оснований. Таким образом, в рамках теории случайных процессов коэффициент корреляции временных рядов не имеет содержательного смысла за исключением той ситуации, когда оба временных ряда являются реализациями стационарных, эргодических процессов.

Исходя из вышесказанного можно заключить, что для выявления коррелированности случайных процессов по соответствующим, временным рядам следует выделить из них случайные компоненты. Если есть основания считать эти компоненты стационарными случайными процессами (например, если математические ожидания и среднеквадратические отклонения почти не меняются во времени), то коэффициент их корреляции имеет содержательный смысл.

С учетом сделанных выше замечаний была выполнена эмпирическая проверка точных формул, полученных в п. 2. Для этого были отобраны акции четырех российских компаний, торгуемых на Московской фондовой бирже: ПАО «Газпром», ПАО «Московская Биржа», ПАО «Сбербанк России» и торговая сеть «Светофор». Данные о котировках акций получены с официального сайта инвестиционного холдинга «Финам» [6]. Соответствующий временной период представлен девятью месяцами с января по сентябрь 2023 г., всего 188 дней. Исходные статистические данные состоят из дневных котировок акций вышеуказанных компаний на момент закрытия торгов за этот период времени (рис. 1).

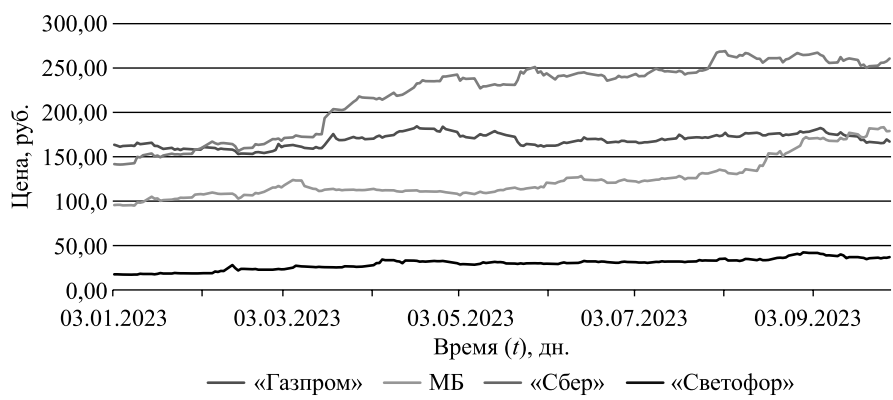


Рис. 1. Котировки акций за январь – сентябрь 2023 г.
Stock prices for January – September 2023

Пронумеруем акции компаний ПАО «Газпром», ПАО «Московская Биржа», ПАО «Сбербанк России», торговая сеть «Светофор» цифрами 1, 2, 3, 4 соответственно. Для каждой акции номер $i = 1, 2, 3, 4$ за каждый день номер $t = -93,5; -92,5; \dots 93,5$ (из данного временного периода длиной 188 дней) была рассчитана дневная доходность x_{it} , как темп прироста цены акции. Для выделения случайных компонент доходностей вычислены их линейные тренды:

$$\begin{cases} x_1(t) = 0,000197 - 0,00000714 \cdot t, \\ x_2(t) = 0,003485 + 0,00002210 \cdot t, \\ x_3(t) = 0,003377 - 0,00004091 \cdot t, \\ x_4(t) = 0,004682 - 0,00004801 \cdot t. \end{cases}$$

Значения z_{it} случайных компонент временных рядов доходностей были найдены как разности $z_{it} = x_{it} - k_i \cdot t$, где k_i – угловой коэффициент линейного тренда доходности акции номер i . Например, $k_3 = -0,00004091$. Полученные в результате значения z_{it} используются в вычислениях вместо исходных доходностей x_{it} . Из них были получены средние дневные доходности $\bar{x}_i = \sum_{t=-93,5}^{93,5} z_{it} / 188$ и коэффициенты волатильности $\sigma_i = \sqrt{\sum_{t=-93,5}^{93,5} (z_{it} - \bar{x}_i)^2 / 187}$ (среднеквадратические отклонения доходностей) для акций каждого эмитента (таблица).

Средние доходности и волатильности акций инвестиционного портфеля
Average returns and volatilities of shares in the investment portfolio

Эмитент	Доходность	Волатильность
«Газпром»	0,000197	0,0129
«Московская Биржа»	0,003485	0,0168
«Сбербанк»	0,00338	0,0163
«Светофор»	0,00468	0,0394

Коэффициенты r_{ij} в системах уравнений (6) и (7) – это коэффициенты корреляции между выборками (рядами данных) z_{it} и z_{jt} , где $k = 4$ и $i, j = 1, 2, 3, 4$. Решения систем (6) и (7):

$$\begin{cases} \alpha_1 = -0,1435, \\ \alpha_2 = 0,1531, \\ \alpha_3 = 0,2046, \\ \alpha_4 = 0,0866, \end{cases} \begin{cases} \beta_1 = 55,46, \\ \beta_2 = 30,42, \\ \beta_3 = 23,72, \\ \beta_4 = 5,90. \end{cases}$$

Из формул (11) были получены следующие значения коэффициентов A_i и B_i :

$$\begin{cases} A_1 = -297,9, \\ A_2 = 100,0, \\ A_3 = 166,0, \\ A_4 = 31,9, \end{cases} \begin{cases} B_1 = 1,0507, \\ B_2 = 0,0691, \\ B_3 = -0,0863, \\ B_4 = -0,0334. \end{cases}$$

Из формул выше (13) выведены значения коэффициентов:

$$A = 16,4, \quad B = -0,0271, \quad C = 0,000175$$

в уравнении (13), выражающем зависимость минимального риска портфеля σ от его ожидаемой доходности P . Параметры p_i соответствующего портфеля акций определяются из формулы (11).

Для того чтобы задача поиска портфеля имела решение, значение P должно находиться в диапазоне от 0,0002 до 0,0047 (между минимальной и максимальной средними доходностями акций, из которых собирается портфель). Фрагмент кривой Марковица на рис. 2 соответствует диапазону средних доходностей от 0,0010 до 0,0035 (по вертикальной оси диаграммы). Диаграмма построена по точкам (σ, P) с шагом $\Delta P = 0,0001$ (светлая кривая на рис. 2). Аналогичная диаграмма выполнена по значениям σ , найденным в процессе численного решения задачи минимизации функции (2) при условиях (3) и (4) (темная кривая на рис. 2). Данная задача решалась с

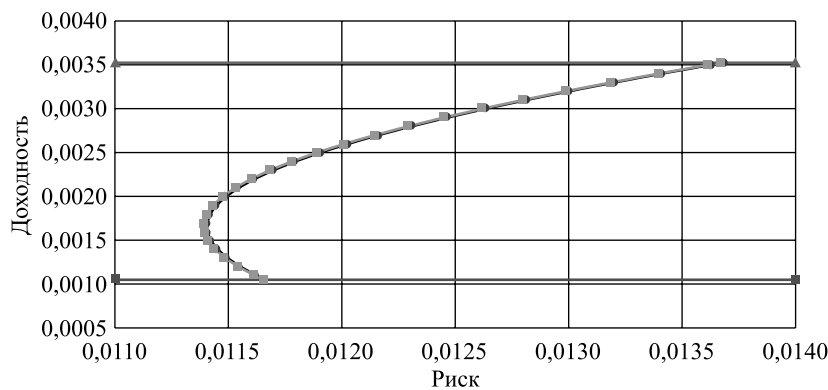


Рис. 2. Теоретическая и эмпирическая кривые Марковица
Theoretical and empirical Markowitz curves

помощью надстройки «Поиск решения» пакета EXCEL для тех же значений P , при этом в роли переменных выступали параметры портфеля p_i .

Как видно из рис. 2, вышеуказанные диаграммы почти неразличимы визуально. Относительная погрешность значений минимального риска σ , найденных двумя способами, не превышает 0,12 %. Таким образом, представленные в этой статье явные формулы для вычисления параметров эффективного портфеля акций по Марковицу хорошо согласуются с результатами численных расчетов.

Эффективная кривая Марковица выделяется из кривой Марковица системой неравенств (14), которая в данном случае принимает следующий вид:

$$\begin{cases} P \leq 0,003526, \\ P \geq -0,000691, \\ P \geq 0,000520, \\ P \geq 0,001049, \\ P \geq 0,001658. \end{cases}$$

Решение данной системы $0,001658 \leq P \leq 0,003526$. Это неравенство определяет эффективную кривую Марковица, изображенную на рис. 3 темным цветом. Точки (σ, P) , лежащие на этой кривой, отвечают эффективным портфелям акций.

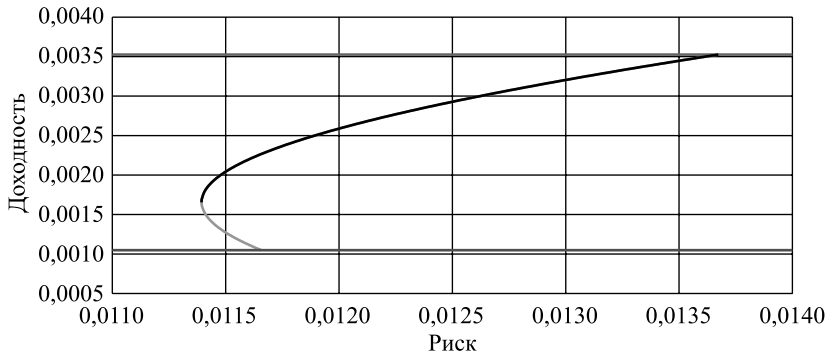


Рис. 3. Теоретическая кривая эффективных портфелей
Theoretical curve of efficient portfolios

5. Заключительные замечания

Данные о дневных доходностях акций четырех эмитентов были использованы в настоящей статье исключительно для эмпирической проверки формул, определяющих эффективный портфель акций. При этом непосредственное применение теории Марковица к анализу дневных доходностей акций требует весьма существенных ограничений на временные ряды исходных данных, а также некоторых преобразований этих данных. Простейшие из этих ограничений и преобразований были рассмотрены в настоящей статье на эвристическом уровне. Однако практическому применению изложенных в п. 4 рекомендаций, безусловно, должны предшествовать более глубокий теоретический анализ и тщательная статистическая проверка.

Список источников

1. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: КноРус, 2010. 658 с.
2. *Криничанский К.В., Безруков А.В.* Построение границы Марковица методом кусочно-нелинейной аппроксимации // *Корпоративные финансы*. 2014. № 3 (31). С. 114–125.
3. *Markowitz H.* Portfolio Selection // *The Journal of Finance*. 1952. Vol. 7, no. 1. Pp. 77–91.
4. *Markowitz H., Peter Todd G.* Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. New York, NY, USA: B. Blackwell, 1987. 408 p.
5. *Tobin J.* The Theory of Portfolio Selection // *Theory of Interest Rates* / Ed. by F.H. Hahn, F.P. R. Brechling. London: MacMillan, 1965. No. 6. Pp. 3–51.
6. *Финам.ру – финансовый портал.* [Электронный ресурс]. URL: <https://www.finam.ru/profile/moex-akcii/gazprom/export/> (дата обращения: 08.11.2023).

Bibliography

1. *Ventcel' E.S.* Teorija verojatnostej [Probability Theory]. Moscow, KnoRus, 2010. 658 p.
2. *Krinichanskij K.V., Bezrukov A.V.* Postroenie granicy Markovica metodom kusочно-nelinejnoj approksimacii [Construction of the Markowitz Frontier by Piecewise Non-linear Approximation]. *Korporativnye finansy* [Corporate Finance], 2014, no. 3 (31), pp. 114–125.
3. *Markowitz H.* Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 1952, vol. 7, no. 1, pp. 77–91.
4. *Markowitz H., Peter Todd G.* Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. New York, NY, USA: B. Blackwell, 1987. 408 p.
5. *Tobin J.* The Theory of Portfolio Selection. *Theory of Interest Rates* / Ed. by F.H. Hahn, F.P. R. Brechling. London: MacMillan, 1965. No. 6. Pp. 3–51.
6. *Finam.ru – finansovyj portal* [Finam.ru – financial portal]. [Electronic resource]. Available at: <https://www.finam.ru/profile/moex-akcii/gazprom/export/> (accessed: 08.11.2023).

Сведения об авторах:

Д.Б. Зотьев – доктор физико-математических наук, кафедра математики и естественных наук, Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИИХ», Новосибирск, Российская Федерация.

В.Е. Соколов – аспирант, преподаватель, кафедра статистики, Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИИХ», Новосибирск, Российская Федерация.

Information about the authors:

D.B. Zotyev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Department of Mathematics and Natural Sciences, Novosibirsk State University of Economics and Management, Novosibirsk, Russian Federation.

V.E. Sokolov – Postgraduate Student, Lecturer, Department of Statistics, Novosibirsk State University of Economics and Management, Novosibirsk, Russian Federation.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

<i>Статья поступила в редакцию</i>	<i>06.02.2024</i>	<i>The article was submitted</i>	<i>06.02.2024</i>
<i>Одобрена после рецензирования</i>	<i>29.06.2024</i>	<i>Approved after reviewing</i>	<i>29.06.2024</i>
<i>Принята к публикации</i>	<i>01.07.2024</i>	<i>Accepted for publication</i>	<i>01.07.2024</i>