

Вестник НГУЭУ. 2024. № 3. С. 134–145
Vestnik NSUEM. 2024. No. 3. P. 134–145

Научная статья
УДК 314.335.044
DOI: 10.34020/2073-6495-2024-3-134-145

МЕТОД РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЦЕПИ МАРКОВА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Кулигин Евгений Вячеславович

*Новосибирский государственный университет
экономики и управления «НИНХ»*

e.v.kuligin@edu.nsuem.ru

Аннотация. В настоящей статье предложен алгоритм расчета вектора стационарного распределения вероятностей для цепи Маркова. Марковские цепи эффективны для моделирования сложных систем в динамике, в том числе социально-экономических процессов, поскольку вместо детерминированных уравнений и зависимостей учитываются различные варианты развития событий. При этом с увеличением числа вариантов резко возрастает сложность решения задачи о нахождении стационарного распределения вероятностей. Идея алгоритма заключается в замене задачи решения характеристического уравнения n -й степени для матрицы вероятностных переходов задачей линейного программирования. Сформулирована математическая постановка задачи, включая определение независимых переменных, нахождение вида целевой функции, ограничений в виде равенств. Для проведения расчетов создана программа на алгоритмическом языке Python. В целях верификации и доказательства ее эффективности проведены расчеты как для типовых задач общего характера, так и для конкретных социально-экономических кейсов. Полученные результаты полностью совпали с тестовыми и показали, что сложность алгоритма составляет $O(n)$. Разработанная методика позволяет шире применять марковские цепи при изучении социально-экономических процессов и получать более достоверные результаты за счет увеличения числа вероятностных состояний системы.

Ключевые слова: цепи Маркова, стационарное распределение вероятностей, сложность алгоритма, характеристическое уравнение, линейное программирование, симплекс-метод

Для цитирования: Кулигин Е.В. Метод расчета стационарного распределения вероятностей в цепи Маркова при моделировании социально-экономических процессов // Вестник НГУЭУ. 2024. № 3. С. 134–145. DOI: 10.34020/2073-6495-2024-3-134-145.

Original article

METHOD OF CALCULATING STATIONARY PROBABILITY DISTRIBUTION IN MARKOV CHAIN IN MODELING SOCIAL AND ECONOMIC PROCESSES

Kuligin Evgeny V.*Novosibirsk State University of Economics and Management*

e.v.kuligin@edu.nsuem.ru

Abstract. This article proposes an algorithm for calculating the vector of the stationary probability distribution for the Markov chain. Markov chains are effective for modeling complex systems in dynamics, including socio-economic processes, since instead of deterministic equations and dependencies, various scenarios are taken into account. At the same time, with an increase in the number of options, the complexity of solving the problem of finding a stationary probability distribution increases sharply. The idea of the algorithm is to replace the problem of solving the characteristic equation of the n -th degree for the matrix of probability transitions with the problem of linear programming. The mathematical formulation of the problem is formulated, including the definition of independent variables, finding the type of objective function, restrictions in the form of equalities. To perform calculations, a program was created in the algorithmic language Python. In order to verify and prove its effectiveness, calculations were carried out both for typical tasks of a general nature and for specific socio-economic cases. The obtained results completely coincided with the test ones and showed that the complexity of the algorithm is $O(n)$. The developed technique allows wider application of Markov in the study of socio-economic processes and obtain more reliable results due to an increase in the number of probabilistic states of the system.

Keywords: Markov chains, stationary probability distribution, algorithm complexity, characteristic equation, linear programming, simplex method

For citation: Kuligin E.V. Method of calculating stationary probability distribution in Markov chain in modeling social and economic processes. *Vestnik NSUEM*. 2024; (3): 134–145. (In Russ.). DOI: 10.34020/2073-6495-2024-3-134-145.

Введение

При рассмотрении социально-экономических процессов большинству исследователей становится очевидным тот факт, что субъекты, участники этих процессов, постоянно сталкиваются с множеством возможностей и вариантов, которые возникают перед ними и, тем самым, стоят перед выбором: какой вариант своих действий выбрать из нескольких, как минимум, двух (быть пассивным наблюдателем или активным участником) альтернатив? Каждое решение и последующее действие (или бездействие) любого субъекта имеет последствия, влияющие как непосредственно на самого субъекта, так и на окружающий мир, это – «эффект бабочки» [1]. Таким образом, субъект, не имея даже теоретической возможности контролировать все аспекты своей деятельности, все равно вынужден реагировать на изменение ситуации. Каким образом описать эти непрерывные взаимозависящие взаимодействия огромного числа субъектов?

Можно провести аналогию с броуновским движением молекул, когда каждая из миллиардов молекул в каждый момент времени движется по произвольной траектории с произвольной скоростью, испытывая при этом влияние других молекул в результате случайных столкновений. Но тем не менее поведение систем молекул в целом вполне адекватно описывается в рамках теории вероятностей известными математическими уравнениями [2].

Аналогия с броуновским движением помогает понять, что хотя в социально-экономических процессах каждый участник принимает решение на основе своих индивидуальных факторов и случайных влияний, поведение системы в целом может быть изучено и достоверно описано с помощью соответствующих моделей и теорий.

Изученность проблемы

Для описания непрерывных связанных взаимодействий огромного числа субъектов возможно использование различных моделей и методов.

Один из наиболее применяемых подходов к описанию сложных взаимодействий – это системный подход [3, 4]. Он предполагает рассмотрение социально-экономических процессов как сложных систем, где каждый субъект является составной частью этой системы. В этом случае взаимодействия субъектов могут быть описаны через взаимодействия между различными элементами системы и их влияние друг на друга. При реализации потребуются громоздкие математические модели и колоссальные вычислительные ресурсы.

Еще один подход, который можно использовать для анализа таких взаимодействий, – агентно-ориентированное моделирование [5, 6]. В этом случае, каждый субъект рассматривается как независимый агент, принимающий решения на основе своих собственных знаний, целей и предпочтений. Взаимодействия между агентами моделируются через различные правила и стратегии, которые определяют решения, принимаемые каждым агентом, возникающие на основе этих решений действия, и происходящие в итоге процессы. Применение данного подхода сталкивается с теми же проблемами, что и рассмотренный выше системный подход.

Точно так же многие социально-экономические процессы описываются при помощи марковского процесса (цепей Маркова) [7]. Например, марковские процессы широко применяются в теории массового обслуживания [8, 9], при прогнозировании деятельности отдельных предприятий и отраслей [7, 10–12]. Специфика этой математической модели заключается в следующем. Развитие системы во времени представляется как стохастический процесс в виде последовательности событий, причем на вероятность перехода в следующее состояние влияет только текущее состояние системы, т.е. зависимость от предыстории отсутствует. При изучении социально-экономических явлений теория марковских цепей, которую называют «динамикой вероятностей», позволяет анализировать и прогнозировать возможность возникновения различных сценариев развития событий [10, 13].

Использование цепей Маркова способствует лучшему пониманию динамики процессов, выявлению закономерностей и тенденций в поведении

системы, что обеспечивает принятие наиболее оптимальных и эффективных управленческих решений на основе вероятностных предсказаний [14]. Кроме того, математические уравнения, применяемые для описания цепей Маркова, выгодно отличаются от других математических моделей простотой и наглядностью при высокой достоверности и точности получаемых решений. Благодаря этим достоинствам теория марковских процессов и ее приложения широко применяются не только при моделировании социально-экономических процессов, но и в самых различных областях естественных наук, таких как физика (теория надежности), химия (теория диффузионных процессов), биология, при решении инженерных задач.

Одним из наиболее ярких примеров применения цепей Маркова для анализа сложных процессов является алгоритм PageRank [15], представляющий собой ядро широко известного поисковика Google.

Актуальность

Для нахождения стационарного распределения вероятностей марковского процесса необходимо определять собственные числа матрицы вероятностей P , что подразумевает решение характеристического уравнения n -й степени. При этом для получения правильного решения задачи следует учитывать особенности конкретной цепи Маркова и ее матрицы переходов.

Получение всех решений такого нелинейного уравнения при больших значениях n представляет порой нетривиальную задачу. Теорема Абеля – Руффини утверждает, что общее алгебраическое уравнение степени $n \geq 5$ не может быть решено в радикалах, т.е. невозможно вывести явную формулу для всех возможных решений, включающую только арифметические операции и корни произвольной степени [16].

Разработаны различные численные методы для решения характеристического уравнения и нахождения собственных значений матрицы.

Самым очевидным представляется алгоритм итерационного нахождения равновесного состояния, основанный на итерационном уточнении распределения вероятностей состояний вплоть до достижения стационарного состояния. Слабыми сторонами данного подхода являются медленная сходимость и большое число операций.

Один из наиболее распространенных методов – метод степенной итерации [17]. Алгоритм так же известен, как итерация фон Мизеса. Он заключается в нахождении наибольшего по модулю собственного значения и, соответственно, лишь единственного собственного вектора. Другой недостаток данного алгоритма – медленная сходимость.

Для улучшения эффективности применяются различные ускоряющие методы, такие как метод обратной итерации [18], метод Ланцоша или метод Арнольди [19]. Однако и эти улучшения работают за время, существенно превышающее $O(n)$. Так, например, метод обратной итерации основан на итерировании обратной матрицы, вычисление которой требует $O(n^2)$ операций.

Кроме того, существуют также приближенные методы для вычисления собственных значений для разреженных матриц, в которых используются

объектные подматрицы или подсистемы, что позволяет упростить решение характеристического уравнения [20]. Но такие алгоритмы не являются массовыми (универсальными), поскольку в большинстве случаев матрица вероятностных переходов вовсе не разрежена.

Для решения характеристического уравнения и нахождения приближенных значений собственных чисел с целью получения стационарного распределения можно использовать прочие известные численные методы и алгоритмы решения нелинейных уравнений [21, 22].

Тем не менее сложность всех упомянутых алгоритмов существенно выше, чем $O(n)$. Их применение, соответственно, требует больших затрат вычислительных ресурсов и времени выполнения.

Разработка алгоритмов нахождения стационарного решения для марковского процесса сложностью $O(n)$ позволит шире применять марковские цепи для более качественных оценок влияния на экономическое развитие и социальные процессы разнообразных факторов в интегральном виде для любых субъектов любого уровня. Это может иметь важное значение для исследований в области экономики и социологии.

Цель настоящей работы – создание метода нахождения стационарного распределения вероятностей марковского процесса сложностью, не превышающей $O(n)$.

Главная задача исследования – проведение расчетов верификации, доказательства работоспособности и определения характеристик созданного алгоритма.

Научная значимость заключается в том, что в настоящей работе впервые предложена методика нахождения стационарного распределения марковских процессов, основанная на замене решения нелинейного уравнения n -й степени для характеристических значений матрицы переходов на задачу линейного программирования. При этом сложность алгоритма уменьшается до $O(n)$.

Применение созданного алгоритма на практике увеличивает возможности применения цепей Маркова для анализа сложных социально-экономических явлений и прочих систем, позволяет строить долговременные прогнозы в самых разных областях экономики и социологии.

Основная часть

Пусть задана матрица вероятностных переходов в цепи Маркова:

$$P = \{p_{ij}\}, \quad i, j = 1 \dots n, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad i = 1 \dots n, \quad (2)$$

где n – число состояний системы, p_{ij} – вероятности перехода из i -го состояния в j -е.

Также задано начальное состояние системы:

$$Q^0 = \{q_i^0\}, \quad i = 1 \dots n, \quad (3)$$

где $q_k^0 = 1$ для $1 \leq k \leq n$, и $q_i^0 = 0$ для всех прочих $i \neq k$.

Требуется найти стационарное распределение вероятностей для марковского процесса (1–3):

$$Q = \{q_i\}, \quad i = 1 \dots n, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n q_i = 1. \quad (5)$$

Рассмотрим поставленную задачу как задачу линейного программирования [15–17] для переменных (4) с ограничениями:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n q_i p_{ij} - q_j = 0, & j = 1 \dots n, \\ \sum_{i=1}^n q_i = 1, \\ q_i \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

При этом возникли затруднения при построении целевой функции. После рассмотрения нескольких вариантов целевая функция была выбрана следующим образом:

$$\Phi = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (q_i p_{ij}) - q_j \right) \rightarrow \min, \quad i, j = 1 \dots n. \quad (7)$$

Для решения задач (6), (7) был использован симплекс-метод [23–25]. Начальные значения переменных (3) задавались случайным образом равными одной из строк матрицы (1).

Результаты

Для проведения расчетов была составлена программа на языке Python. При выборе специализированной библиотеки (модуля) Python для решения задач линейного программирования использовались результаты работы [26]. В ней типовая задача линейного программирования решалась с применением трех основных специализированных библиотек: `pulp` [27], `cvxopt` [28] и `scipy.optimize` [29]. Лучший результат (минимальное время работы) был получен с модулем `scipy.optimize`, поэтому в настоящей работе применялась указанная библиотека.

Для верификации и проверки работоспособности предложенной методики были проведены тестовые расчеты как для классических учебных задач [13, 30], так и для предложенных в ряде работ примеров конкретных экономических кейсов [7, 10]. Результаты расчетов всюду верные.

Также были проведены серии расчетов для различных значений n . Значения p_{ij} ($i, j = 1 \dots n$) генерировались случайным образом. В табл. 1 представлены полученные результаты.

Из представленных данных можно предположить, что сложность алгоритма составляет $O(n)$, несмотря на отсутствие формального доказательства.

Заметим, что при создании многих алгоритмов авторы пренебрегают формальной стороной вопроса, предпочитая испытание алгоритма на тестовых задачах и дальнейшее применение для решения конкретных проблем.

Таблица 1

Число итераций для нахождения стационарного распределения
Number of iterations to find stationary distribution

Размер матрицы переходов	Число итераций (минимум – максимум)
3	3–5
4	4–7
5	5–8
6	6–10
7	7–11
8	8–12
9	9–12
10	10–13
12	12–15
20	20–25

Именно таким образом муравьиный алгоритм, предложенный М. Дориго [31], был тестирован на задаче коммивояжера (нахождение минимального Гамильтонова цикла), относящейся к классу NP-сложных задач. В настоящее время данный алгоритм успешно применяется в самых различных отраслях – от внутренней логистики компаний до расчета траекторий спутников.

Также обстоит дело и с теоремой о «четырех красках». Доказательство основано на том, что после проведения множества расчетов с использованием специально разработанного программного обеспечения не удалось найти наименьшего контрпримера к теореме [32].

Для проверки эффективности и устойчивости была использована классическая задача о лягушке (она же – с блуждающим пьяницей) для различного числа состояний с поглощающим состоянием. Так, например, матрица переходов для этой задачи в случае 11 состояний перехода представлена в табл. 2. Поглощающее состояние – в первой строке.

Таблица 2

Матрица переходов с поглощающим состоянием
Transition matrix with absorbing state

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0,5	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0,5	0	0,5	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0,5	0	0,5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0,5	0	0,5	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0,5	0	0,5	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0,5	0	0,5	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0,5	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0,5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5

В табл. 3 представлены результаты расчетов для различных начальных состояний с применением созданной методики в сравнении с методом итераций.

Таблица 3

Число итераций до попадания в поглощающее состояние
Number of iterations before reaching the absorbing state

№ начального состояния	Симплекс-метод	Итерационный процесс
2	10	20
3	11	38
4	11	54
5	11	68
6	11	80
7	11	90
8	11	98
9	11	104
10	11	108
11	11	110

Приведенные результаты убедительно доказывают эффективность созданной методики наряду с высокой устойчивостью.

Заключение

Предложен оригинальный алгоритм сложности $O(n)$ нахождения стационарного распределения вероятностей в цепях Маркова, основанный на сведении задачи решения нелинейного уравнения n -й степени к задаче линейного программирования и решении последней симплекс-методом.

Разработанный алгоритм выгодно отличается простотой применения и, как показали проведенные расчеты на примерах решения тестовых задач, эффективностью в сравнении с уже существующими методами. Доказана устойчивость и робастность алгоритма.

Созданная методика позволяет эффективно анализировать динамику социально-экономических систем и процессов, выявлять закономерности и тенденции, что обеспечивает принятие наиболее оптимальных и эффективных управленческих решений.

Список литературы

1. Рэй Брэдбери. И грянул гром... (сборник). М.: Молодая гвардия, 1976.

2. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика: учебник для вузов / 18-е изд., стер. СПб.: Лань, 2022. 436 с. URL: <https://e.lanbook.com/book/221120> (дата обращения: 03.03.2024).

3. Кузнецов В.В., Шатраков А.Ю. Системный анализ: учебник и практикум для вузов / под общ. ред. В.В. Кузнецова; 2-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2024. 333 с. URL: <https://urait.ru/bcode/537575> (дата обращения: 03.03.2024).

4. *Алексеева М.Б., Ветренко П.П.* Теория систем и системный анализ: учебник и практикум для вузов. М.: Юрайт, 2024. 298 с. URL: <https://urait.ru/bcode/536569> (дата обращения: 03.03.2024).
5. *Караев А.К., Мельничук М.В.* Финансовая неустойчивость и макроэкономическая нестабильность: агентно ориентированное моделирование: монография. М.: Дашков и К, 2014. 158 с. URL: <https://e.lanbook.com/book/70597> (дата обращения: 03.03.2024).
6. *Акопов А.С., Хачатрян Н.К.* Агентное моделирование. М.: Центральный экономико-математический институт РАН, 2016. 76 с.
7. *Марков А.А.* Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга // Известия физико-математического общества при Казанском университете. 2-я серия. Т. 15. Казань, 1906. С. 135–156.
8. *Бочаров П.П.* Стационарное распределение конечной очереди с рекуррентным потоком и марковским обслуживанием // АиТ. 1996. № 9. С. 66–78.
9. *Бочаров П.П., Печинкин А.В., Д'Аниче Ч., Фонг Н.Х.* Однолинейная система обслуживания конечной емкости с групповым марковским потоком и полумарковским обслуживанием // Вестн. Российского университета дружбы народов. Серия «Прикладная математика и информатика». 2001. № 1. С. 64–79.
10. *Холод Н.И., Ефремов А.А.* Цепи Маркова как инструмент моделирования деятельности предприятий АПК в условиях неопределенности // Научные труды Белорусского государственного экономического университета. Минск: БГЭУ, 2015. Вып. 8. С. 398–405.
11. *Шмидт А.В.* Применение цепей Маркова при определении стратегии функционирования и развития предприятия по критерию экономической устойчивости // Вестник ЮУрГУ. Серия «Экономика и менеджмент». 2011. № 8 (225). Вып. 17. С. 145–153.
12. *Канторович Л.В.* Математика в экономике: достижения, трудности, перспективы. Ростов н/Д: Мапреконт, 2010. 19 с. (Лауреаты Нобелевской премии). URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=614170> (дата обращения: 09.03.2024).
13. *Дмитрусенко Н.С., Булатникова М.Е.* Случайные величины. Цепи Маркова. В 2 ч. Ч. 2. Двумерные случайные величины: учебное пособие. М.: Российский университет транспорта (МИИТ), 2017. 84 с. URL: <https://www.iprbookshop.ru/116081.html> (дата обращения: 12.02.2024).
14. *Скорород А.В.* Марковские процессы и вероятностные приложения в анализе // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Соврем. проблемы математики. Фундаментальные направления. 1989. № 43. С. 147–188.
15. *Page L., Brin S., Motwani R. and Winograd T.* (1998) The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web. Technical Report SIDL-WP-1999-0120, Stanford Digital Library Technologies Project.
16. *Dehn E.* Algebraic Equations: An Introduction to the Theories of Lagrange and Galois (англ.). New York: Columbia University Press, 1930.
17. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И.* Вычислительные методы высшей математики: в 2 т. / под ред. И.П. Мысовских. Минск, 1972. Т. 1. 584 с.
18. *Тыртыйшиков Е.Е.* Матричный анализ и линейная алгебра: учеб. пособие. М., 2007. 480 с.
19. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. 2nd ed. Philadelphia, 2003. 528 p.
20. *Sewell G.* Computational Methods of Linear Algebra. 2nd ed. New Jersey, 2005. 268 p.
21. *Фалейчик Б.В.* Методы вычислений. Минск: Издательский центр Белорусского государственного университета, 2014. 224 с.
22. *Marcel F. Neuts* Matrix-geometric solutions in stochastic models. Johns Hopkins University Press, 1981. 332 p.
23. *Банди Б.* Основы линейного программирования / под ред. В.А. Волынского; пер. с англ. О.В. Шихеевой. М.: Радио и связь, 1989. 176 с.

24. Карманов В.Г. Математическое программирование: учеб. пособие / 5-е изд., стереотип. М.: Физматлит, 2004. 264 с.
25. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс. Редакция литературы по экономике, 1966. 600 с.
26. Решение задач линейного программирования с использованием Python. URL: <https://habr.com/ru/articles/330648/>.
27. PuLP 2.9.0. URL: <https://pypi.org/project/PuLP/>.
28. CVXOPT. Программное обеспечение Python для выпуклой оптимизации. URL: <https://cvxopt.org/>.
29. SciPy documentation. URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.html>.
30. Муссеева С.П. Теория случайных процессов. Ч. 2. Марковские процессы: учебное пособие. Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. 58 с.
31. Colonna A., Dorigo M., Maniezzo V. Distributed Optimization by Ant Colonies, actes de la première conférence européenne sur la vie artificielle, Paris, France, Elsevier Publishing, 134–142, 1991.
32. Gonthier G. A computer-checked proof of the Four Colour Theorem. Microsoft Research Cambridge (2005). Архивировано 5 июня 2022 года.

References

1. Rjei Brjedberi. I grjanul grom... (sbornik) [Ray Bradbury. And a Sound of Thunder... (collection)]. Moscow, Molodaja gvardija, 1976.
2. Savel'ev I.V. Kurs obshhej fiziki. V 3 t. T. 1. Mehanika. Molekuljarnaja fizika: uchebnik dlja vuzov [General Physics Course. In 3 volumes. Volume 1. Mechanics. Molecular Physics: textbook for universities], 18-e izd., ster. St. Petersburg, Lan', 2022. 436 p. Available at: <https://e.lanbook.com/book/221120> (accessed: 03.03.2024).
3. Kuznecov V.V., Shatrakov A.Ju. Sistemnyj analiz: uchebnik i praktikum dlja vuzov [System Analysis: textbook and workshop for universities], pod obshh. red. V.V. Kuznecova; 2-e izd., pererab. i dop. Moscow, Jurajt, 2024. 333 p. Available at: <https://urait.ru/bcode/537575> (accessed: 03.03.2024).
4. Alekseeva M.B., Vetrenko P.P. Teorija sistem i sistemnyj analiz: uchebnik i praktikum dlja vuzov [Systems theory and systems analysis: textbook and workshop for universities]. Moscow, Jurajt, 2024. 298 p. Available at: <https://urait.ru/bcode/536569> (accessed: 03.03.2024).
5. Karaev A.K., Mel'nichuk M.V. Finansovaja neustojchivost' i makroekonomicheskaja nestabil'nost': agentno orientirovannoe modelirovanie: monografija [Financial Instability and Macroeconomic Instability: Agent-Based Modeling: monograph]. Moscow, Dashkov i K, 2014. 158 p. Available at: <https://e.lanbook.com/book/70597> (accessed: 03.03.2024).
6. Akopov A.S., Hachatrjan N.K. Agentnoe modelirovanie [Agent-based modeling]. Moscow, Central'nyj jekonomiko-matematicheskij institut RAN, 2016. 76 p.
7. Markov A.A. Rasprostranenie zakona bol'shih chisel na velichiny, zavisjashhie drug ot druga [Extension of the law of large numbers to quantities dependent on each other]. Izvestija fiziko-matematicheskogo obshhestva pri Kazanskom universitete. 2-ja serija. Vol. 15. Kazan', 1906. Pp. 135–156.
8. Bocharov P.P. Stacionarnoe raspredelenie konechnoj ocheredi s rekurrentnym potokom i markovskim obsluzhivaniem [Stationary Distribution of a Finite Queue with a Recurrent Flow and Markov Service], *AiT [AiT]*, 1996, no. 9, pp. 66–78.
9. Bocharov P.P., Pechinkin A.V., D'Apiche Ch., Fong N.H. Odnolinejnaja sistema obsluzhivanija konechnoj emkosti s gruppovym markovskim potokom i polumarkovskim obsluzhivaniem [Single-Line Queueing System of Finite Capacity with a Group Markov Flow and Semi-Markov Service], *Vestn. Rossijskogo universiteta družby narodov*.

- Seriya «Prikladnaja matematika i informatika» [Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Applied Mathematics and Informatics"]*, 2001, no. 1, pp. 64–79.
10. Holod N.I., Efremov A.A. Cepi Markova kak instrument modelirovanija dejatel'nosti predpriyatij APK v uslovijah neopredelennosti [Chains as a Tool for Modeling the Activities of Agricultural Enterprises under Uncertainty]. *Nauchnye trudy Belorusskogo gosudarstvennogo jekonomicheskogo universiteta*. Minsk, BGJeU, 2015. Iss. 8. Pp. 398–405.
 11. Shmidt A.V. Primenenie cepej Markova pri opredelenii strategii funkcionirovanija i razvitiya predpriyatija po kriteriju jekonomicheskoy ustojchivosti [Application of Markov Chains in Determining the Strategy of Operation and Development of an Enterprise Based on the Criterion of Economic Sustainability], *Vestnik JuUrGU. Serija «Jekonomika i menedzhment» [Bulletin of SUSU. Series "Economics and Management"]*, 2011, no. 8 (225), iss. 17, pp. 145–153.
 12. Kantorovich L.V. Matematika v jekonomike: dostizhenija, trudnosti, perspektivy [Mathematics in Economics: Achievements, Difficulties, Prospects]. Rostov-na-Donu: Maprekon, 2010. 19 p. (Laureaty Nobelevskoj premii). Available at: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=614170> (accessed: 09.03.2024).
 13. Dmitrusenko N.S., Bulatnikova M.E. Sluchajnye velichiny. Cepi Markova. V 2 ch. Ch. 2. Dvumernye sluchajnye velichiny: uchebnoe posobie [Random Variables. Markov Chains. In 2 Parts. Part 2. Two-Dimensional Random Variables: Tutorial]. Moscow, Rossijskij universitet transporta (MIIT), 2017. 84 p. Available at: <https://www.iprbookshop.ru/116081.html> (accessed: 12.02.2024).
 14. Skorohod A.V. Markovskie processy i verojatnostnye prilozhenija v analize [Markov processes and probabilistic applications in analysis], *Itogi nauki i tehniki. VINITI. Sovrem. problemy matematiki. Fundamental'nye napravlenija [Results of science and technology. VINITI. Modern problems of mathematics. Fundamental directions]*, 1989, no. 43, pp. 147–188.
 15. Page L., Brin S., Motwani R. and Winograd T. (1998) The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web. Technical Report SIDL-WP-1999-0120, Stanford Digital Library Technologies Project.
 16. Dehn E. Algebraic Equations: An Introduction to the Theories of Lagrange and Galois (angl.). New York: Columbia University Press, 1930.
 17. Krylov V.I., Bobkov V.V., Monastyryj P.I. Vychislitel'nye metody vysshej matematiki: v 2 t. [Computational Methods of Higher Mathematics: in 2 volumes], pod red. I.P. Mysovskih. Minsk, 1972. Vol. 1. 584 p.
 18. Tyrtysnikov E.E. Matrichnyj analiz i linejnaja algebra: ucheb. posobie [Matrix Analysis and Linear Algebra: textbook. manual]. Moscow, 2007. 480 p.
 19. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. 2nd ed. Philadelphia, 2003. 528 p.
 20. Sewell G. Computational Methods of Linear Algebra. 2nd ed. New Jersey, 2005. 268 p.
 21. Falejchik B.V. Metody vychislenij [Methods of Computation]. Minsk, Izdatel'skij centr Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta, 2014. 224 p.
 22. Marcel F. Neuts Matrix-geometric solutions in stochastic models. Johns Hopkins University Press, 1981. 332 p.
 23. Bandi B. Osnovy linejnogo programmirovaniya [Fundamentals of Linear Programming], pod red. V.A. Volynskogo; per. s angl. O.V. Shiheevoy. Moscow, Radio i svjaz', 1989. 176 p.
 24. Karmanov V.G. Matematicheskoe programmirovanie: ucheb. posobie [Mathematical programming: textbook], 5-e izd., stereotip. Moscow, Fizmatlit, 2004. 264 p.
 25. Dancig Dzh. Linejnoe programmirovanie, ego primenenija i obobshhenija [Linear programming, its applications and generalizations]. Moscow, Progress. Redakcija literatury po jekonomike, 1966. 600 p.

26. Reshenie zadach linejnogo programmirovaniya s ispol'zovaniem Python [Solving linear programming problems using Python]. Available at: <https://habr.com/ru/articles/330648/>.

27. PuLP 2.9.0. Available at: <https://pypi.org/project/PuLP/>.

28. CVXOPT. Programmnoe obespechenie Python dlja vypukloj optimizacii [CVXOPT. Python software for convex optimization]. Available at: <https://cvxopt.org/>.

29. SciPy documentation. Available at: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.html>.

30. Moiseeva S.P. Teorija sluchajnyh processov. Ch. 2. Markovskie processy: uchebnoe posobie [Theory of random processes. Part 2. Markov processes: a tutorial]. Tomsk, Izdatel'skij Dom Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, 2014. 58 p.

31. Colorni A., Dorigo M., Maniezzo V. Distributed Optimization by Ant Colonies, actes de la première conférence européenne sur la vie artificielle, Paris, France, Elsevier Publishing, 134–142, 1991.

32. Gonthier G. A computer-checked proof of the Four Colour Theorem. Microsoft Research Cambridge (2005). Arhivirovano 5 ijunja 2022 goda.

Сведения об авторе:

Е.В. Кулигин – кандидат физико-математических наук, доцент, Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИНХ», Новосибирск, Российская Федерация.

Information about the author:

E.V. Kuligin – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Novosibirsk State University of Economics and Management, Novosibirsk, Russian Federation.

<i>Статья поступила в редакцию</i>	<i>20.03.2024</i>	<i>The article was submitted</i>	<i>20.03.2024</i>
<i>Одобрена после рецензирования</i>	<i>24.05.2024</i>	<i>Approved after reviewing</i>	<i>24.05.2024</i>
<i>Принята к публикации</i>	<i>01.07.2024</i>	<i>Accepted for publication</i>	<i>01.07.2024</i>