

---

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОИСКИ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

УДК 338.3

## О МОДЕЛЯХ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА ПРЕДПРИЯТИЯ\*

**А.Е. Бахтин, Ю.Н. Владимиров**

Новосибирский государственный университет  
экономики и управления «НИНХ»

E-mail: a.e.bahtin@edu.nsuem.ru, y.n.vladimirov@nsuem.ru

Работа посвящена разработке методики определения экономической стратегии предприятия с учетом взаимовыгодного обмена ресурсами с другими предприятиями. Введены в рассмотрение функции спроса и предложения ресурсов в зависимости от норм обмена, изучены их свойства и на их основе разработан итеративный метод нахождения взаимовыгодного обмена ресурсами между предприятиями. Суть метода состоит в следующем: одно предприятие устанавливает норму обмена ресурсов, а другое определяет объемы ресурсов, которые оно готово обменять по этой норме. Такой переговорный процесс непосредственно между предприятиями заканчивается достижением неподвижной точки, определяющей равновесные норму обмена, спроса и предложения.

*Ключевые слова:* предприятие, оптимизация, обмен, спрос, предложение, равновесие.

## OPTIMIZATION OF PRODUCTION OF ENTERPRISE WITH REGARD TO INTERACTION WITH OTHER ENTERPRISES

**A.E. Bahtin, Yu.N. Vladimirov**

Novosibirsk State University of Economics and Management

E-mail: a.e.bahtin@edu.nsuem.ru, y.n.vladimirov@nsuem.ru

The paper discusses development of methodology of determination of economic strategy of enterprise with regard to mutually beneficial exchange of resources with other enterprises. Demand and supply functions depending on exchange norms are introduced, their properties are examined and the iterative method of determination of a mutually beneficial exchange of resources between enterprises is developed on their basis. Principle of the method is as follows: one enterprise establishes a rate of exchange of resources, and the other determines volumes of resources it is ready to exchange at that rate. Such negotiating process directly between enterprises ends at fixed point that defines balanced norm of exchange rate, demand and supply.

*Key words:* enterprise, optimization, exchange, demand, supply, balance.

---

\* Работа выполнена при поддержке гранта НГУЭУ № 12г/2014 по НИР «Математическое моделирование взаимодействия между предприятиями при оптимизации производства: поиск равновесия».

При разработке эффективной экономической стратегии развития предприятия необходимы всесторонний анализ и учет не только возможностей в области технологии производства, но и совершенствование управленческой деятельности предприятия путем организационно-управленческих нововведений. Эффективность деятельности предприятия в значительной мере зависит от степени активизации взаимодействия с другими предприятиями отрасли, которые могут быть весьма разнообразными.

Одной из форм взаимодействия является взаимовыгодный обмен имеющимися у предприятий производственными ресурсами или совместное их использование, причем термин «обмен» здесь имеет широкое толкование. В частности, обменом ресурсов считается использование оборудования предприятия-партнера взамен на предоставление возможности использования необходимого ему другого оборудования.

Другой формой взаимодействия предприятий является взаимовыгодное сотрудничество предприятий при производстве продукции путем вложения на договорных условиях некоторой части денежных средств в производство другого предприятия, выпускающего более рентабельную продукцию, что приводит к получению дополнительной прибыли, которая распределяется между фирмами-партнерами на обоюдовыгодных условиях, предусмотренных предварительным соглашением. В выигрыше оказываются каждый из участников сотрудничества [9, 10, 12, 13].

В данной статье рассматриваются вопросы математического моделирования процессов обмена ресурсами между предприятиями при оптимизации производства, построения и изучения свойств, введенных в рассмотрение функций спроса и предложения в зависимости от нормы обмена, а также опирающийся на эти функции метод поиска взаимовыгодного равновесного обмена ресурсами.

Математическое моделирование таких процессов приводит к трудным математическим задачам нелинейной оптимизации и проблеме поиска равновесия в условиях множественности спроса и предложения, обусловленного наличием различных технологий производства.

В экономической литературе описание процесса обмена товарами, ресурсами или услугами между субъектами сопровождается ящиком Эджуорта. Количественное определение положения равновесия при обмене обычно находится в задачах, где участники обмена осуществляют свой выбор на основе хорошо изученных классических функций полезности, обладающих хорошими свойствами. Для них в аналитической форме найдены простые однозначные функции спроса и предложения в зависимости от цен и доходов.

Проблема количественного определения равновесия при многопродуктовом производстве и обмене ресурсами в ситуации, когда однозначного спроса на них нет, может быть преодолена благодаря ее специфической особенности. В рассматриваемой ситуации участниками обмена являются фирмы, производящие различные продукты с помощью линейных технологий, которые с целью повышения прибыли заинтересованы в обмене имеющимися у них ресурсами на взаимовыгодных условиях. Эффективность деятельности фирмы оценивается величиной получаемой ею прибыли, включающей и ту дополнительную прибыль, которая может быть получена за счет перераспределения ресурсов в результате обмена.

Рассмотрим задачу оптимизации производства на предприятиях с учетом возможного взаимовыгодного обмена их производственными ресурсами. Для этого к технологиям производства продуктов в модели предприятий добавляются возможные способы обмена ресурсами по коэффициентам (нормам) обмена, которые заранее неизвестны и являются искомыми величинами. Выгодные для предприятия способы обмена находятся с помощью коэффициентов технологической нормы замещения ресурсов на предприятиях. Такое расширение моделей приводит к тому, что наряду с неизвестными объемами продуктов в моделях с обменом появляются переменные спроса и предложения ресурсов при их обмене по нормам, подлежащим определению.

Зависимость чистого спроса и предложения ресурса от нормы обмена выражается кусочной дробно-линейной функцией, а ее график представляет собой своеобразную лесенку, составленную из чередующихся вертикальных прямых ступенек с криволинейными ступеньками, являющимися участками ветвей некоторых гипербол. Равновесие определяется точкой пересечения таких ступенчатых кривых линий спроса и предложения.

Рассмотрим два предприятия и их задачи оптимизации производства сначала без обмена ресурсами:

$$\max \{PX | AX \leq a, X \geq 0\}, \quad (I)$$

$$\max \{\pi Y | BY \leq b, Y \geq 0\}, \quad (II)$$

$P, \pi$  – векторы цен на производимые продукты,

$A_{(2 \times n)}, B_{(2 \times m)}$  – технологические матрицы затрат ресурсов,

$a, b$  – векторы объемов имеющихся у предприятий собственных ресурсов.

Пусть оба предприятия автономно на собственных ресурсах решили свои задачи по оптимизации производства, в результате чего определили объемы выпуска продукции и ожидаемые доходы. Одновременно найдены и оптимальные двойственные оценки  $u_1^*$  и  $u_2^*$  ресурсов предприятия 1 и оценки  $w_1^*$  и  $w_2^*$  ресурсов предприятия 2.

С помощью этих оценок определим предельные технологические нормы замещения первого ресурса вторым в точках оптимума:  $MRTS_{12} = \frac{u_1^*}{u_2^*} = \alpha_0$  для предприятия 1 и  $MRTS_{12} = \frac{w_1^*}{w_2^*} = \beta_0$  для предприятия 2.

Будем считать  $\alpha_0 > \beta_0$ . Покажем, что в этом случае предприятию 1 выгоден обмен второго ресурса на первый, а предприятию 2 выгоден обмен первого ресурса на второй по коэффициенту (норме) обмена  $e_{12}$ , если  $\beta_0 < e_{12} < \alpha_0$ . Величина  $e_{12}$  показывает количество второго ресурса при обмене его на 1 ед. первого ресурса.

Перейдем к задачам  $I(e_{12})$  и  $II(e_{12})$ , полученным из автономных задач I и II добавлением способов обмена ресурсами по норме  $e_{12}$ :

$$\begin{array}{l} \text{Задача I}(e_{12}) \\ \sum_j p_j x_j \rightarrow \max, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Задача II}(e_{12}) \\ \sum_j \pi_j y_j \rightarrow \max, \end{array}$$

$$\begin{aligned}\sum_j a_{1j}x_j - d &\leq a_1, \\ \sum_j a_{2j}x_j + e_{12}d &\leq a_2, \\ x_j &\geq 0, \quad d \geq 0,\end{aligned}$$

$d$  – спрос на первый ресурс,  
 $e_{12}d$  – предложение второго ресурса  
 предприятия 1 взамен первого.

$$\begin{aligned}\sum_j b_{1j}y_j + s &\leq b_1, \\ \sum_j a_{2j}y_j - e_{12}s &\leq b_2, \\ y_j &\geq 0, \quad s \geq 0,\end{aligned}$$

$s$  – предложение первого ресурса,  
 $e_{12}s$  – спрос на второй ресурс пред-  
 приятия 2.

Задача  $I(e_{12})$  получена добавлением к технологиям производства

$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix}$  способа обмена  $E_{12} = \begin{pmatrix} -1 \\ e_{12} \end{pmatrix}$ , а в задаче  $II(e_{12})$  к технологиям

$B_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \end{pmatrix}$  добавлен способ обмена  $-E_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ -e_{12} \end{pmatrix}$ . При  $e_{12} < \alpha_0$  использование

добавленного способа обмена  $E_{12}$  выгодно для предприятия 1. Формально это вытекает из того, что

$$(E_{12}, U^*) = -u_1^* + e_{12}u_2^* = \left(-\frac{u_1^*}{u_2^*} + e_{12}\right)u_2^* = (-\alpha_0 + e_{12})u_2^* < 0, \text{ если } e_{12} < \alpha_0.$$

Выгоден обмен первого ресурса на второй по норме  $e_{12}$  и предприятию 2, если  $\beta_0 < e_{12}$ , так как

$$(-E_{12}, W^*) = w_1^* - e_{12}w_2^* = \left(\frac{w_1^*}{w_2^*} - e_{12}\right)w_2^* = (\beta_0 - e_{12})w_2^* < 0, \text{ если } \beta_0 < e_{12}.$$

Возьмем какое-либо значение нормы обмена  $e_{12}$  в промежутке  $[\beta_0, \alpha_0]$  и решим задачи  $I(e_{12})$  и  $II(e_{12})$ . Обозначим оптимальные значения переменных  $d$  и  $s$  через  $d^* = d(e_{12})$  и  $s^* = s(e_{12})$ .

Задача оптимизации производства предприятий с учетом взаимовыгодного обмена ресурсами сводится к поиску равновесия при обмене, т.е. в нахождении такой нормы обмена  $\tilde{e}_{12}$ , при которой  $d(\tilde{e}_{12}) = s(\tilde{e}_{12})$ . Равенство спроса и предложения для второго ресурса достигается автоматически.

**Построение и анализ функций чистого спроса  $d(e_{12})$  и предложения  $s(e_{12})$ .**

При отыскании равновесия в процессе обмена ресурсами будем опираться на функцию спроса  $d(e_{12})$  на первый ресурс предприятия 1 и функцию предложения  $s(e_{12})$  этого ресурса предприятия 2. Поэтому выясним характерные особенности таких функций и покажем способ их нахождения.

Пусть при некотором фиксированном значении нормы обмена  $e_{12}$  оп-

тимум задачи  $I(e_{12})$  определяется технологией  $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix}$  и способом об-

мена  $E_{12} = \begin{pmatrix} -1 \\ e_{12} \end{pmatrix}$ . Рассмотрим соответствующую базисной матрице  $\begin{pmatrix} a_{1j} & -1 \\ a_{2j} & e_{12} \end{pmatrix}$

прямую систему уравнений:

$$\begin{aligned}a_{1j}x_j - d &= a_1, \\ a_{2j}x_j - e_{12}d &= a_2,\end{aligned}$$

откуда

$$d(e_{12}) = \frac{a_{1j}a_2 - a_{2j}a_1}{a_{1j}e_{12} + a_{2j}} = \frac{a_2 - \frac{a_{2j}}{a_{1j}}a_1}{e_{12} + \frac{a_{2j}}{a_{1j}}} = \frac{a_2 - r_{12}^j a_1}{e_{12} + r_{12}^j}, \quad (1)$$

где  $r_{12}^j$  – относительная норма потребления второго ресурса, показывающая, сколько потребляется второго ресурса на единицу первого ресурса по технологии  $j$ .

Найдем оптимальные двойственные оценки ресурсов из системы:

$$\begin{aligned} a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 &= p_j, \\ -u_1 + e_{12}u_2 &= 0, \\ u_1(e_{12}) &= \frac{p_j e_{12}}{a_{1j}e_{12} + a_{2j}}, \quad u_2(e_{12}) = \frac{p_j}{a_{1j}e_{12} + a_{2j}}. \end{aligned} \quad (2)$$

При некоторых значениях  $e_{12}$  в задаче  $I(e_{12})$  могут быть не одна, а несколько оптимальных технологий, отличающихся относительной нормой потребления  $r_{12}^j$ . В этом случае спрос на ресурс будет множественным.

Рассмотрим формулу (1) для определения спроса  $d(e_{12})$  при фиксированном значении  $e_{12}$  с изменяющейся непрерывно относительной нормой потребления  $r_{12}$ , т.е.  $d(r_{12}) = (a_2 - r_{12}a_1)/(e_{12} + r_{12})$ . Производная по параметру  $r_{12}$  этой функции равна

$$d'_{r_{12}} = \frac{-a_1(e_{12} + r_{12}) - (a_2 - r_{12}a_1)}{(e_{12} + r_{12})^2} = \frac{a_1e_{12} + a_2}{(e_{12} + r_{12})^2} < 0.$$

Следовательно, спрос на первый ресурс снижается при увеличении  $r_{12}$  и растет при уменьшении  $r_{12}$ .

Поэтому нижняя граница для величины спроса первого ресурса  $\underline{d}(e_{12})$  в случае не единственности оптимальных технологий определяется по технологии с наименьшей относительной нормой потребления первого ресурса, а верхняя граница  $\bar{d}(e_{12})$  по технологии с наибольшей относительной нормой потребления первого ресурса. Промежуточный спрос на отрезке  $D(e_{12}) = [\underline{d}(e_{12}), \bar{d}(e_{12})]$  отвечает смешанной технологии.

Показано, что функция спроса  $d(e_{12})$  строго монотонно убывает в интервале устойчивости оптимального базиса, т.е. с увеличением нормы  $e_{12}$  спрос на первый ресурс снижается, поэтому существует обратная к ней функция, которая определяется дробно-линейной функцией

$$e_{12} = \frac{a_2 - r_{12}^j a_1}{d} - r_{12}^j \quad (3)$$

и по величине спроса можно однозначно определить соответствующую ему норму обмена.

Отметим, что при увеличении нормы обмена  $e_{12}$  эффективность 1 ед. второго ресурса, равная  $u_2(e_{12}) = \frac{p_j}{a_{1j}e_{12} + a_{2j}}$  снижается и предприятие 1 переходит к технологиям производства с меньшим относительным потре-

блением второго ресурса, высвобождая тем самым в большем количестве второй ресурс для обмена его на первый. При уменьшении  $e_{12}$ , наоборот, эффективность обмена снижается, и предприятие 1 переходит на технологии с большей относительной нормой потребления второго ресурса, снижая тем самым спрос на первый ресурс.

Функция спроса на первый ресурс  $d(e_{12})$  является кусочной дробно-линейной функцией. Ее график представляет собой ниспадающую ступенчато-гиперболическую линию при увеличении  $e_{12}$ . Ее криволинейные ступени являются кусками гипербол, а вертикальные отрезки между кусками гипербол соответствуют множественному спросу. Чем левее гиперболический кусок линии спроса, тем он выше, тем ближе от начала координат отстоит вертикальная асимптота  $e_{12} = -r_{12}^j$  соответствующей ему гиперболы и тем больше коэффициент ее растяжения  $k_j = a_2 - r_{12}^j a_1$ . Это означает, что вышележащие куски гипербол круче нижележащих.

Рассмотрим задачу  $\Pi(e_{12})$  второго предприятия, предлагающего первый ресурс в обмен на второй. Пусть при некотором значении  $e_{12}$  оптимальная

базисная матрица равна  $\begin{pmatrix} b_{1k} & 1 \\ b_{2k} & -e_{12} \end{pmatrix}$ . Найдем соответствующие этому базису

функцию спроса и двойственные оценки ресурсов.

Из прямой системы

$$\begin{aligned} b_{1k} y_k + s &= b_1, \\ b_{2k} y_k - e_{12} s &= b_2, \end{aligned}$$

находим

$$s(e_{12}) = \frac{b_{2k} b_1 - b_{1k} b_2}{b_{1k} e_{12} + b_{2k}} = \frac{\frac{b_{2k}}{b_{1k}} b_1 - b_2}{e_{12} + \frac{b_{2k}}{b_{1k}}} = \frac{\rho_{12}^k b_1 - b_2}{e_{12} + \rho_{12}^k}, \quad (4)$$

а из двойственной системы

$$\begin{aligned} b_{1k} w_1 + b_{2k} w_2 &= \pi_k, \\ w_1 - e_{12} w_2 &= 0, \end{aligned}$$

получаем оценки

$$w_1(e_{12}) = \frac{\pi_k e_{12}}{b_{1k} e_{12} + b_{2k}}, \quad w_2(e_{12}) = \frac{\pi_k}{b_{1k} e_{12} + b_{2k}}. \quad (5)$$

В случае не единственности оптимальных технологий в задаче  $\Pi(e_{12})$  имеет место множественность предложения  $S(e_{12})$ . Заменив в формуле (4)  $\rho_{12}^k$  непрерывной величиной  $\rho_{12}$ , получим функцию  $s(\rho_{12}) = (\rho_{12} b_1 - b_2) / (e_{12} + \rho_{12})$ .

Производная  $s'_{\rho_{12}} = (b_1 e_{12} + b_2) / (e_{12} + \rho_{12})^2 > 0$ , поэтому предложение снижается при уменьшении  $\rho_{12}$  и растет при увеличении  $\rho_{12}$ .

Следовательно, наименьшее предложение первого ресурса  $\underline{s}(e_{12})$  соответствует оптимальной технологии с наименьшим относительным потреблением второго ресурса  $\rho_{12}$ , а наибольшее предложение  $\bar{s}(e_{12})$  первого ресурса определяется оптимальной технологией с наибольшим относительным потреблением второго ресурса. Промежуточное предложение на отрезке  $S(e_{12}) = [\underline{s}(e_{12}), \bar{s}(e_{12})]$  относится к выпуклой линейной комбинации двух таких крайних технологий.

Формула (5) определяет предложение  $s(e_{12})$  предприятия 2 при изменении нормы обмена  $e_{12}$  в интервале устойчивости оптимального базиса по параметру  $e_{12}$ . График функции  $s(e_{12})$  представляет собой ниспадающий вниз кусок гиперболы, как график функции спроса предприятия 1. Вся функция предложения при изменении  $e_{12}$  в промежутке  $[\beta_0, \alpha_0]$  является кусочной дробно-линейной функцией, а ее график состоит из кусков гипербол и вертикальных отрезков, отображающих множественное предложение на границах интервалов устойчивости оптимальных технологий.

Существенное отличие рассматриваемых функций спроса и предложения состоит в том, что функция спроса является монотонно убывающей на всем отрезке  $[\beta_0, \alpha_0]$ , а функция предложения нет. Если для заданной величины спроса  $d$  однозначно можно определить соответствующую ей норму обмена, то одной и той же величине предложения может отвечать не единственная норма обмена.

**Нахождение взаимовыгодного равновесного обмена ресурсами.** Все указанные выше свойства функций спроса и предложения лежат в основе предлагаемого метода нахождения взаимовыгодного равновесного обмена ресурсами между предприятиями, суть которого состоит в следующем:

- предприятие, предъявляющее спрос на ресурс, предлагает норму обмена, т.е. указывает, сколько единиц имеющегося у него другого ресурса оно готово отдать взамен на единицу запрашиваемого ресурса,
- предприятие-партнер по взаимовыгодному обмену рассчитывает предложение по запрашиваемому ресурсу, определяемому по указанной норме обмена, руководствуясь критерием максимизации своего дохода.

Процесс такого согласования заканчивается достижением неподвижной точки, т.е. получением равновесной нормы обмена, спроса и предложения.

Первоначальная норма обмена может быть выбрана произвольно из промежутка  $[\beta_0, \alpha_0]$ , а на последующих шагах переговорного процесса норма обмена определяется с учетом сделанного предложения. Предлагаемая норма обмена должна обеспечивать получение максимального дохода предприятию при равенстве спроса на запрашиваемый ресурс сделанному предложению партнером по обмену. Такой итеративный процесс приводит к неподвижной точке, определяющей взаимовыгодный обмен и равновесие.

Ниже на условных данных двух предприятий построим графоаналитическим способом функции спроса и предложения ресурсов в зависимости от нормы обмена, продемонстрируем отмеченные их свойства и найдем оптимальные решения задач предприятий по описанному выше методу (табл. 1, 2).

Таблица 1

| Исходные данные по предприятию 1 |    |   |    |               |
|----------------------------------|----|---|----|---------------|
| Цена продукта                    | 10 | 7 | 10 | Объем ресурса |
| Технологии                       | 1  | 1 | 2  | 50            |
|                                  | 4  | 1 | 1  | 170           |

Таблица 2

| Исходные данные по предприятию 2 |    |    |    |    |               |
|----------------------------------|----|----|----|----|---------------|
| Цена продукта                    | 11 | 19 | 10 | 14 | Объем ресурса |
| Технологии                       | 3  | 2  | 1  | 1  | 200           |
|                                  | 1  | 3  | 2  | 3  | 30            |

Обозначим через  $x_1, x_2, x_3$  – объемы выпуска продуктов на предприятии 1,  $d$  – величину спроса предприятия 1 на первый ресурс,  $e_{12}$  – норму

обмена второго ресурса на единицу первого, а через  $u_1, u_2$  – двойственные оценки ресурсов и выпишем по данным табл. 1 исходную и двойственную задачи предприятия 1.

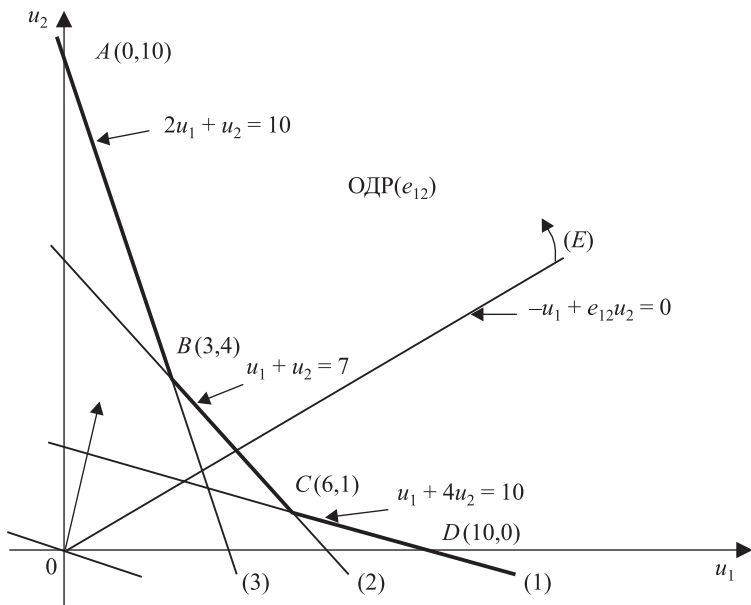
| Исходная задача $I(e_{12})$ :                   | Двойственная задача $I'(e_{12})$ : |
|-------------------------------------------------|------------------------------------|
| $10x_1 + 7x_2 + 10x_3 \rightarrow \max,$        | $50u_1 + 170u_2 \rightarrow \min,$ |
| $x_1 + x_2 + 2x_3 - d \leq 50,$                 | $u_1 + 4u_2 \geq 10,$              |
| $4x_1 + x_2 + x_3 + e_{12}d \leq 170,$          | $u_1 + u_2 \geq 7,$                |
| $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, d \geq 0.$ | $2u_1 + u_2 \geq 10,$              |
|                                                 | $-u_1 + e_{12}u_2 \geq 0,$         |
|                                                 | $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0.$          |

Проведем параметрический анализ двойственной задачи  $I'(e_{12})$  графическим способом. На рисунке показана ОДР( $e_{12}$ ) задачи  $I'(e_{12})$ , нормаль к линиям уровня целевой функции и линия уровня, проходящая через начало координат.

Если рассмотреть автономную задачу I, где нет переменной спроса  $d$ , и соответствующую ей двойственную задачу, то точкой минимума в такой задаче будет вершина  $C = (6,1)$ , а минимальное значение двойственной функции равно  $50 \cdot 6 + 170 \cdot 1 = 470$ . Это максимальный доход предприятия 1, который может быть получен без обмена с использованием собственных ресурсов.

Он достигается при следующих объемах выпуска продуктов:  $x_1 = 40, x_2 = 10, x_3 = 0$ ; доход  $= 10 \cdot 40 + 7 \cdot 10 = 470$ .

Предельная технологическая норма замещения первого ресурса вторым в точке оптимума  $C$  равна  $MRTS_{12} = \frac{u_1^*}{u_2^*} = \frac{6}{1} = 6$ . Поэтому для предпри-



Геометрическая интерпретация задачи  $I'(e_{12})$

ятия 1 выгоден обмен второго ресурса на первый только в том случае, если за единицу приобретаемого первого ресурса оно будет отдавать меньше 6 единиц второго, т.е. при норме обмена  $e_{12} < 6$ .

Если, начиная с  $e_{12} = 6$  норма обмена уменьшается, то линия обмена ( $E$ ) будет поворачиваться влево. Точка минимума двойственной задачи будет находиться на пересечении линии обмена ( $E$ ) с ломаной линией  $ABC$  и смещаться по ней вверх и влево, начиная с вершины  $C = (6,1)$  сначала по отрезку  $CB$  до вершины  $B = (3,4)$  ломаной, а затем по отрезку  $BA$  вплоть до вершины  $A = (0,10)$  при  $e_{12} = 0$ .

На графике видно, что при  $e_{12} = 6$  оптимальными технологиями являются первая и вторая технологии, а так как такая норма обмена совпадает с предельной нормой технологического замещения ресурсов  $MRTS_{12}$ , то обмен по этой норме второго ресурса на первый не изменит величину дохода. Однако обмен по такой норме приведет к необходимости увеличения объема потребления первого ресурса с одновременным уменьшением потребления второго, что может происходить при увеличении выпуска второго продукта и снижении выпуска первого, так как относительная норма потребления первого ресурса при производстве второго продукта больше, чем при выпуске первого:

$$r_{12}^2 = \frac{1}{1} > r_{12}^1 = \frac{1}{4}.$$

Максимальный спрос на первый ресурс становится в момент прекращения выпуска первого продукта. Как только коэффициент обмена станет чуть меньше 6, оптимальной останется единственная вторая технология, причем с уменьшением нормы обмена спрос на первый ресурс увеличивается. Одновременно увеличивается и доход.

При норме обмена  $e_{12} = 0,75$  точкой минимума становится вершина  $B$ , которая находится на пересечении второй и третьей граничных прямых линий, т.е. оптимальной наряду со второй технологией становится третья технология, которая вытесняет вторую, так как  $r_{12}^3 = \frac{2}{1} > r_{12}^2 = \frac{1}{1}$ .

При  $e_{12} < 0,75$  остается оптимальной третья технология вплоть до  $e_{12} = 0$ .

Параметрический анализ показал, что с уменьшением нормы обмена  $e_{12}$  спрос на первый ресурс увеличивается с одновременным ростом дохода.

При совпадении нормы обмена с предельной нормой технологического замещения ресурсов имеет место множественный спрос, обусловленный множественностью оптимальных технологий.

Определим теперь с помощью найденных оптимальных технологий функцию спроса в зависимости от нормы обмена. Так как при изменении нормы обмена в интервале  $(0,75; 6)$  спрос определяется единственной второй технологией, то для нахождения его величины необходимо решить систему уравнений:

$$x_2 - d = 50,$$

$$x_2 + e_{12}d = 170,$$

откуда

$$d(e_{12}) = \frac{120}{e_{12} + 1}.$$

При  $e_{12} \in (0; 0,75)$  величина спроса определяется третьей технологией, поэтому она удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{aligned}x_3 - 2d &= 50, \\ x_3 + e_{12}d &= 170,\end{aligned}$$

откуда

$$d(e_{12}) = \frac{145}{e_{12} + 0,5}.$$

При  $e_{12} = 6$  нижняя граница множественного спроса определяется автономным решением и равна  $\underline{d}(6) = 0$ , а верхняя граница определяется по формуле  $\bar{d}(6) = 120/(6 + 1) = 17$ , т.е. промежуток изменения множественного спроса равен  $D(6) = [0, 17]$ .

Наименьший спрос при  $e_{12} = 0,75$  равен  $\underline{d}(0,75) = 120/(0,75 + 1) = 69$ , а наибольший  $\bar{d}(0,75) = 145/(0,75 + 0,5) = 116$ . Следовательно, промежуток изменения спроса равен  $D(0,75) = [69, 116]$ .

Найденную зависимость спроса от нормы обмена представим в табл. 3.

Таблица 3

**Зависимость спроса предприятия 1на первый ресурс от нормы обмена**

|                        |           |                          |             |                            |
|------------------------|-----------|--------------------------|-------------|----------------------------|
| Норма обмена           | 6         | $6 > e_{12} > 0,75$      | 0,75        | $0,75 > e_{12} \geq 0$     |
| Оптимальные технологии | 1,2       | 2                        | 2,3         | 3                          |
| Спрос                  | $[0, 17]$ | $\frac{120}{e_{12} + 1}$ | $[69, 116]$ | $\frac{145}{e_{12} + 0,5}$ |

Так как функция спроса  $d(e_{12})$  монотонно убывающая функция, то она имеет обратную, т.е. по величине спроса можно однозначно определить соответствующую ей норму обмена.

Так как дальше в процессе поиска равновесного обмена обратная функция  $e_{12}(d)$  потребуется, то представим ее в табл. 4.

Таблица 4

**Зависимость нормы обмена от величины спроса для предприятия 1**

|                        |           |                     |             |                       |
|------------------------|-----------|---------------------|-------------|-----------------------|
| Спрос                  | $[0, 17]$ | $(17,69)$           | $[69, 116]$ | $(116,290)$           |
| Оптимальные технологии | 1,2       | 2                   | 2,3         | 3                     |
| Норма обмена           | 6         | $\frac{120}{d} - 1$ | 0,75        | $\frac{145}{d} - 0,5$ |

Выпишем по табл. 2 задачу предприятия 2, которое по предлагаемой норме обмена  $e_{12}$  определяет предложение первого ресурса

**Задача II( $e_{12}$ )**

$$\begin{aligned}10y_1 + 17y_2 + 15y_3 + 14y_4 &\rightarrow \max, \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + s &\leq 210, \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 - e_{12}s &\leq 40, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, s &\geq 0.\end{aligned}$$

Неизвестными являются объемы выпусков продуктов  $y_i$ , предложение первого ресурса  $s$ . Автономное решение задачи:  $y_1 = 40, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0$ , доход = 400, оценки ресурсов равны  $w_1^* = 0, w_2^* = 10$ . Предельная норма технологического замещения первого ресурса вторым равна  $MRTS_{12} = \frac{0}{10} = 0$  и предприятие 2 заинтересовано в обмене первого ресурса на второй. Равновесная норма обмена  $\tilde{e}_{12}$  находится на отрезке  $[0, 6]$ .

Равновесие будем находить по описанному выше алгоритму.

Пусть предприятие 1 первоначально предложило норму обмена  $e_{12} = 3$ . Покажем, как в этом случае будет проходить переговорный процесс последовательного приближения к равновесному обмену ресурсами, который существенно увеличит доходы обоих предприятий.

Итерация 1: предприятие 2, решив задачу I(3), находит предложение первого ресурса  $s(3) = 76$ ;

предприятие 1 по табл. 4 находит, что спрос  $d = 76$  определяется второй и третьей его технологиями и соответствует норме обмена  $e_{12} = 0,75$ .

Итерация 2: предприятие 2, решив задачу II(0,75), находит предложение  $s(0,75) = 138$ ;

предприятие 1 находит, что его спрос на первый ресурс  $d = 138$  определяется третьей технологией и соответствует норме обмена  $e_{12} = \frac{145}{138} - 0,5 = 0,55$ .

Итерация 3: предприятие 2, решив задачу II(0,55) находит предложение  $s(0,55) = 149$ ;

предприятие 1 из табл. 4 находит, что спрос  $d = 149$  соответствует третьей технологии и норме обмена  $e_{12} = \frac{145}{149} - 0,5 = 0,47$ .

Итерация 4: предприятие 2, решив задачу II(0,47), находит предложение  $s(0,47) = 154$ ;

предприятие 1 определяет с помощью третьей технологии норму обмена  $e_{12} = \frac{145}{154} - 0,5 = 0,44$ .

Далее приводим численные результаты еще трех итераций, начиная с четвертой: 5)  $s(0,44) = 156$ ;  $e_{12} = 0,429$ ; 6)  $s(0,429) = 156,4$ ;  $e_{12} = 0,427$ ; 7)  $s(0,427) = 156,6$ ;  $e_{12} = 0,426$ .

Таким образом, практически достигнута неподвижная точка, определяющая равновесную норму обмена  $\tilde{e}_{12} = 0,426$  и равновесные спрос и предложение  $\tilde{d} = \tilde{s} = 156,6$ .

Равновесные чистые спрос и предложение по второму ресурсу равны  $0,426 \cdot 156,6 = 66,7$ .

Валовые объемы ресурсов после обмена для предприятия 1 определяются вектором  $\tilde{a} = (206,6; 103,3)$ , а для предприятия 2 вектором  $\tilde{b} = (53,4; 106,9)$ .

Если решить задачи предприятий с полученными после обмена объемами ресурсами, то получим такие результаты: для предприятия 1 доход увеличился до 1033, что превышает доход до обмена, равный 470, на 120 %; для предприятия 2 доход увеличился до 801, что больше дохода до обмена, равного 400, на 100 %.

### Литература

1. *Бахтин А.Е.* Анализ модели взаимодействия фирм при оптимизации производства продукции с помощью собственных и заемных денег // Совершенствование институциональных механизмов в промышленности: сб. науч. трудов; ИЭ и ОПП СО РАН. Новосибирск, 2005. С. 136–155.
2. *Бахтин А.Е.* Взаимовыгодный обмен ресурсами при оптимизации своих производств фирмами. Определение равновесия // Вестник НГУ. Серия Социально-экономические науки. Т. 2. Вып. 1. Новосибирск, 2007. С. 81–92.
3. *Бахтин А.Е., Владимиров Ю.Н.* Математические методы оценки эффективности взаимодействия между предприятиями при оптимизации производства // Инновационная и промышленная политика региона (Экопром – 2014) / труды международной научно-практической конференции (15–23 сентября 2014 г.). СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. С. 451–463.
4. *Бахтин А.Е., Владимиров Ю.Н.* Нахождение равновесного обмена ресурсами между предприятиями при оптимизации производства // Математические методы в прикладных исследованиях» / сб. науч. трудов. Вып. 5. Новосибирск: НГУЭУ, 2012. С. 3–23.
5. *Бахтин А.Е.* Нахождение взаимовыгодного обмена ресурсами между предприятиями при оптимизации производства // Инновационная фирма: теория и практика развития» / сб. науч. трудов; ИЭ и ОПП СО РАН. Новосибирск, 2011. С. 291–311.
6. *Бахтин А.Е.* Нахождение взаимовыгодного обмена ресурсами между предприятиями при оптимизации производства // Стратегическое планирование и развитие предприятий. Секция 3. Опыт стратегического планирования на российских и зарубежных предприятиях / мат-лы симпозиума № 12; ЦЭМИ РАН. М., 2011. С. 24–25.
7. *Бахтин А.Е.* Нахождение равновесия в обменном процессе ресурсами между предприятиями при оптимизации производства // Модернизация экономики и формирование технологических платформ (инпром-2011). Секция 6. Экономика и менеджмент инновационного развития предприятий (организаций) / труды междунар. науч.-практ. конф. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. С. 342–347.
8. *Бахтин А.Е.* Нахождение взаимовыгодного обмена ресурсами между предприятиями при оптимизации производства // Инновационная фирма: теория и практика развития / сб. науч. трудов; ИЭ и ОПП СО РАН. Новосибирск, 2011. С. 291–311.
9. *Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И.* Микроэкономика. Т. 1, 2. СПб.: Экономическая школа, 2000.
10. *Замков О.О., Черемных Ю.А., Толстомятко А.В.* Математические методы в экономике: учебник. М.: Дело и сервис, 1999.
11. Инновационная фирма: теория и практика развития / под ред. В.В. Титова, В.Д. Марковой. Новосибирск: ИЭ и ОПП СО РАН, 2011.
12. *Малыхин В.И.* Математическое моделирование экономики: учеб.-практ. пособие для вузов. М.: Изд-во УРАО, 1998.
13. *Пиндайк Р., Рубинфельд Д.* Микроэкономика. М.: Дело, 2001.
14. Совершенствование институциональных механизмов управления в промышленных корпорациях / под ред. В.В. Титова, В.Д. Марковой. Новосибирск: ИЭ и ОПП СО РАН, 2013.
15. Управление инновационной деятельностью экономических систем (инпром-2014) / труды междунар. науч.-практ. конф. (2–7 июня 2014 г.). СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014.
16. *Черемных Ю.Н.* Микроэкономика. Продвинутый уровень. М.: ИНФРА-М, 2008.

### Bibliography

1. *Bahtin A.E.* Analiz modeli vzaimodejstvija firm pri optimizacii proizvodstva produkcii s pomoshh'ju sobstvennyh i zajomnyh deneg // Sovershenstvovanie institucional'nyh

- mekanizmov v promyshlennosti / sb. nauch. trudov; IJe i OPP SO RAN. Novosibirsk, 2005. P. 136–155.
2. *Bahtin A.E.* Vzaimovыgodnyj obmen resursami pri optimizacii svoih proizvodstv firmami. Opredelenie ravnovesija // Vestnik NGU. Serija Social'no-jekonomicheskie nauki. T. 2. Vyp. 1. Novosibirsk, 2007. P. 81–92.
  3. *Bahtin A.E., Vladimirov Ju.N.* Matematicheskie metody ocenki jeffektivnosti vzaimodejstviya mezhdu predpriyatijami pri optimizacii proizvodstva // Innovacionnaja i promyshlennaja politika regiona (Jekoprom – 2014) / trudy mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (15–23 sentjabrja 2014 g.). SPb.: Izd-vo Politehn. un-ta, 2014. P. 451–463.
  4. *Bahtin A.E., Vladimirov Ju.N.* Nahozhdenie ravnovesnogo obmena resursami mezhdu predpriyatijami pri optimizacii proizvodstva // Matematicheskie metody v prikladnyh issledovanijah / Sb. nauch. trudov. Vyp. 5. Novosibirsk: NGUJeU, 2012. P. 3–23.
  5. *Bahtin A.E.* Nahozhdenie vzaimovыgodnogo obmena resursami mezhdu predpriyatijami pri optimizacii proizvodstva // Innovacionnaja firma: teorija i praktika razvitija / cb. nauch. trudov; IJe i OPP SO RAN. Novosibirsk, 2011. P. 291–311.
  6. *Bahtin A.E.* Nahozhdenie vzaimovыgodnogo obmena resursami mezhdu predpriyatijami pri optimizacii proizvodstva // Strategicheskoe planirovanie i razvitie predpriyatij. Sekcija 3. Opyt strategicheskogo planirovanija na rossijskih i zarubezhnyh predpriyatijah / mat-ly simpoziuma № 12; CJeMI RAN. M., 2011. P. 24–25.
  7. *Bahtin A.E.* Nahozhdenie ravnovesija v obmennom processe resursami mezhdu predpriyatijami pri optimizacii proizvodstva // Modernizacija jekonomiki i formirovanie tehnologicheskikh platform (inprom-2011). Sekcija 6. Jekonomika i menedzhment innovacionnogo razvitija predpriyatij (organizacij) / trudy mezhdunar. nauch.-prakt. konf. SPb.: Izd-vo Politehn un-ta, 2011. P. 342–347.
  8. *Bahtin A.E.* Nahozhdenie vzaimovыgodnogo obmena resursami mezhdu predpriyatijami pri optimizacii proizvodstva // Innovacionnaja firma: teorija i praktika razvitija / sb. nauch. trudov; IJe i OPP SO RAN. Novosibirsk, 2011. P. 291–311.
  9. *Gal'perin V.M., Ignat'ev S.M., Morgunov V.I.* Mikrojekonomika. T. 1, 2. SPb.: Jekonomicheskaja shkola, 2000.
  10. *Zamkov O.O., Cheremnyh Ju.A., Tolstopjatko A.V.* Matematicheskie metody v jekonomike: uchebnik. M.: Delo i servis, 1999.
  11. Innovacionnaja firma: teorija i praktika razvitija / pod red. V.V. Titova, V.D. Markovoj. Novosibirsk: IJe i OPP SO RAN, 2011.
  12. *Malyhin V.I.* Matematicheskoe modelirovanie jekonomiki: ucheb.-prakt. posobie dlja vuzov. M.: Izd-vo URAO, 1998.
  13. *Pindajk R., Rubinfel'd D.* Mikrojekonomika. M.: Delo, 2001.
  14. Sovershenstvovanie institucional'nyh mehanizmov upravlenija v promyshlennyh korporacijah / pod red. V.V. Titova, V.D. Markovoj. Novosibirsk: IJe i OPP SO RAN, 2013.
  15. Upravlenie innovacionnoj dejatel'nost'ju jekonomicheskikh sistem (inprom-2014) / trudy mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (2–7 ijunja 2014 g.). SPb.: Izd-vo Politehn. un-ta, 2014.
  16. *Cheremnyh Ju.N.* Mikrojekonomika. Prodvinutyj uroven'. M.: INFRA-M, 2008.