УДК 519.2

ФУРЬЕ-СОПРЯЖЕННЫЕ МОДЕЛИ В КОНЦЕПЦИИ КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОГО ДУАЛИЗМА

Ю.Н. Дубнищев
Институт теплофизики Сибирского отделения РАН,
Новосибирский государственный технический университет
E-mail: dubnistchev@itp.nsc.ru

Т.Я. Дубнищева
Новосибирский государственный университет
экономики и управления «НИНХ»
E-mail: t.y.dubnishcheva@nsuem.ru

В работе обсуждается концепция корпускулярно-волнового дуализма, основанная на фурье-сопряженных математических моделях движения корпускулы как сигналов в координатном и частотном пространствах.

Ключевые слова: корпускулярно-волновой дуализм, волна де Бройля, соотношения неопределенностей, фурье-преобразования, принцип неопределенности.

FOURIER-RELATED MODELS IN CONCEPT OF WAVE-CORPUSCLE DUALITY

Yu.N. Dubnishchev
Institute of Thermophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk State Technical University
E-mail: dubnistchev@itp.nsc.ru

T.Ya. Dubnishcheva
Novosibirsk State University of Economics and Management
E-mail: t.y.dubnishcheva@nsuem.ru

The paper discusses the concept of wave-corpuscle duality based on Fourier-related mathematical models of corpuscle movement as signals in coordinate and frequency space.

Key words: wave-corpuscle duality, de Broglie wave, uncertainty relation, Fourier transforms, uncertainty principle.

Корпускулярно-волновой дуализм – один из концептуальных принципов построения физической картины мира, разработка которых основана на синтезе физических образов и аналогий, отображаемых языком математики. Пуанкаре, со слов де Бройля, считал, что «существует бесконечно много логически эквивалентных точек зрения и картин действительности, из которых ученый, руководствуясь исключительно соображениями удобства, выбирает какую-либо одну» [1]. Традиционное описание корпускулярно-волнового дуализма основано на квантовании энергии движущейся корпускулы по аналогии с фотонами. При изложении корпускулярно-волнового дуализма обычно используется моделирование движущихся частиц волновыми пакетами и оптико-механическая аналогия. Однако проблема простой и наглядной модели, объясняющей появление волновых свойств у движущейся частицы, остается актуальной. Настоящая работа является мотивированной попыткой построения такой модели, основанной на комбинации физических и математических аналогий, уточняющей понимание волновой природы движущейся материи.

Гениальная догадка де Бройля о волновых свойствах движущихся частиц возникла на основе оптико-механической аналогии Гамильтона–Якоба, квантовании и представлении световых полей потоком световых частиц (фотонов), обладающих волновыми свойствами (Паули, Эйнштейн), и теоретической модели, указывающей на эквивалентность массы и энергии (Пуанкаре, Эйнштейн) [5]. Идея квантования иллюстрируется на простом примере гармонического осциллятора. Движение гармонического осциллятора на фазовой плоскости (в координатах импульс–смещение) отображается фазовой траекторией в виде эллипса. Площадь, оконтуренная этой траекторией, равняется отношению энергии E и частоты v колебаний, $I = E/\nu$, получившему название адиабатический инвариант, поскольку он сохраняется при малых адиабатических изменениях частоты. Это означает, что отношение энергии колебаний гармонического осциллятора к частоте равно производной энергии по частоте или при замене дифференциалов малыми приращениями отношению соответствующих приращений энергии и частоты:

$$I = \frac{E}{\nu} = \frac{dE}{d\nu} = \frac{\Delta E}{\Delta \nu} = \mathrm{const}.$$

Отсюда следует возможность квантования адиабатического инварианта, который в аналитической механике получил название «действия». Квантуется именно действие, а не энергия, которая является непрерывной функцией частоты.

Гармонический осциллятор, адиабатический инвариант которого квантуется, а квант действия равен постоянной Планка h, является квантовым осциллятором. Особенность квантового осциллятора состоит в том, что, согласно соотношениям неопределенности Гейзенберга, его фазовая траектория не может быть замкнутой. При этом неопределенность положения фазовой траектории на фазовой плоскости равна $1/2h$ и адиабатический инвариант квантового осциллятора определяется формулой $I = (n + 1/2)h$. Поскольку для гармонического осциллятора адиабатический инвариант много больше постоянной Планка, его изменение с частотой можно считать непрерывным, а фазовую траекторию – замкнутой. Существование кванта действия h есть необходимое, но не достаточное условие для соотношений неопределенности Гейзенберга. Они следуют из корпускулярно-волнового дуализма, который в свою очередь основан на комбинации физических образов, аналогий и математических преобразований, в числе которых преобразование Фурье.

Обратимся к гармонической волне, распространяющейся в координатном пространстве и описываемой периодической функцией вида $\exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]$. Фаза этой волны, $\varphi = wt - \mathbf{kr}$, определяется алгебраической суммой зависимой от времени $\varphi(t)$ и пространственно-зависимой $\varphi(\mathbf{r})$ компонент. Зависимая от времени компонента фазы находится как произведение круговой частоты ω на время t. Круговая частота волны определяется как $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, где T – период волны. Пространственная компонента фазы есть произведение волнового вектора $\mathbf{k}$ на радиус-вектор $\mathbf{r}$, описывающий положение точки в пространстве. Модуль волнового вектора $\mathbf{k}$ определяется пространственным периодом волны Λ, $|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\Lambda$. Из сравнения $\omega = 2\pi/T$ и $k = 2\pi/\Lambda$ видна схожесть структур частоты ω и модуля волнового вектора $|\mathbf{k}| = k$. Поэтому волновой вектор $\mathbf{k}$ имеет смысл пространственной частоты. В отличие от частоты ω пространственная частота $\mathbf{k}$ является вектором, который определяется проекциями k_x, k_y и k_z в декартовой системе координат. Волна в координатном пространстве описывается в системе координат (t, x, y, z), в частотном пространстве – в системе координат (ω, k_x, k_y, k_z). Соответственно, если движущийся физический объект в координатном пространстве задан математической моделью $s(t, \mathbf{r})$, то в частотном пространстве этой модели соответствует фурье-спектр $s(\omega, \mathbf{k})$.

Частотное пространство эквивалентно пространству импульсному, поскольку координаты их отличаются множителем $\hbar = h/2\pi$: $\mathbf{p} = \mathbf{k}\hbar$ и $E = \omega\hbar$. Движение физических объектов (корпускула, макротело, волна) может отображаться в координатном или частотном (импульсном) пространствах. Эти отображения связаны через преобразование Фурье и отвечают физической реальности. Например, летящий мяч может быть описан его положением, скоростью, импульсом, а в случае собственного вращения – моментом импульса. Конечно, речь идет о представлениях и преобразованиях не самих объектов, а об описывающих их математических моделях и сигналах, регистрируемых наблюдателем. В соответствии с классическим определением: «Материя – это объективная реальность, данная нам в ощущениях», можно понимать под ощущениями – сигналы. Понятия пространственной частоты, частотного и импульсного пространства широко используются в науке и технике. Примером могут служить оптические информационные технологии, спектроскопия [2, 3].

Пусть движущаяся материальная частица в координатном пространстве описывается функцией $s(\mathbf{r} + \mathbf{v}t)$, где $\mathbf{r}$ – радиус–вектор положения частицы и $\mathbf{v}$ – вектор ее скорости; t – время. В частотном пространстве она отображается фурье-спектром $s(\omega, \mathbf{k})$, являющимся функцией пространственной частоты $\mathbf{k} = k(\mathbf{v}/\mathrm{v})$ (волновой вектор) и временной частоты ω. Функции $s(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ и $s(\omega, \mathbf{k})$ связаны преобразованием Фурье:

$$s(\mathbf{r} + \mathbf{v}t) \leftrightarrow \int\int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{r} + \mathbf{v}t)\exp(-i\mathbf{kr})\exp(-i\omega t)d\mathbf{r}dt =$$

$$= s(\mathbf{k})\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\omega - \mathbf{kv})t]dt = 2\pi s(\mathbf{k})\delta(\omega - \Omega), \quad (1)$$

где $\delta(\omega - \Omega)$ – дельта-функция Дирака. Здесь мы воспользовались теоремой смещения и ввели обозначение $\Omega = \mathbf{kv}$. Функция $2\pi s(\mathbf{k})\delta(\omega - \Omega)$ есть фурье-спектр функции $s(\mathbf{r} + \mathbf{v}t)$, описывающей частицу, движущуюся в координатном пространстве. Как следует из (1), в частотном пространстве фурье-спектр сигнала, отображающего движущуюся частицу, имеет вид δ-функции, локализованной на временной частоте $\Omega = \mathbf{kv}$ и пространственной частоте $\mathbf{k} = \dfrac{\mathbf{v}}{\mathrm{v}^2}\Omega$. Направление скорости $\mathbf{v}$ корпускулы и волнового вектора (пространственной частоты) **k** совпадают, а модуль волнового вектора **k** (волновое число k) определяется отношением частоты Ω к скорости v:

$$\left|\mathbf{k}\right| = k = \frac{\Omega}{\mathrm{v}}.$$

Частота Ω равна произведению волнового вектора на вектор скорости движения частицы: $\Omega = \mathbf{kv}$, что идентично формуле для доплеровского частотного сдвига и указывает на кинематическую природу частоты Ω. Скорость **v** является относительной скоростью систем отсчета корпускулы и наблюдателя, а для волны, индуцированной движением корпускулы, – групповой скоростью.

Воспользовавшись определением групповой скорости как производной частоты по волновому числу $v = \frac{d\Omega}{dk}$, запишем простые преобразования выражения для частоты Ω в виде:

$$\Omega = \mathbf{kv} = \frac{\mathbf{kv}}{\mathrm{v}}\frac{d\Omega}{dk}. \tag{2}$$

Согласно квантово-механической концепции, $\Omega = \frac{E}{\hbar}$. Учитывая, что энергия E есть кинетическая энергия движения частицы, $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$, где m – масса и $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\mathrm{v}}p$ – импульс частицы, получаем из уравнения (2):

$$p = \hbar\frac{2\pi}{\Lambda_{\text{в}}} = \hbar k_{\text{в}},$$

где $\Lambda_{\text{в}}$ – длина волны де Бройля и $k_{\text{в}}$ – волновое число де Бройля:

$$\Lambda_{\text{в}} = \frac{h}{p},\ \ k_{\text{в}} = \frac{2\pi}{\Lambda_{\text{в}}} = \frac{p}{\hbar}. \tag{3}$$

Согласно (3), длина волны де Бройля, индуцированной движением частицы, определяется отношением постоянной Планка к импульсу. Кинетическая энергия движущейся частицы относительна в системе отсчета наблюдателя так же, как и ее импульс.

Корпускулярно-волновой дуализм есть фундаментальное свойство движущейся материи, универсальность которого следует из квантовой концепции и адекватного представления движения корпускулы в фурье-сопряженных координатном и частотном пространствах. Он связан с соотношениями неопределенностей, которые имеют универсальный характер и являются следствием принципа неопределенности для описывающих движущуюся частицу функций $s(t)$ и $s(\Omega)$ как сигналов, фурье-сопряженных в координатном и частотном пространствах. Эти функции несут информацию о движущейся частице и удовлетворяют принципу неопределенности для сигналов [2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\left|s(t)\right|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2\left|s(\Omega)\right|^2 d\Omega \geq \frac{\pi}{2}\mathrm{E}^2,$$

где Е – энергия сигнала. Из принципа неопределенности следует соотношение неопределенностей

$$\Delta t \Delta \Omega \geq \frac{1}{2}, \tag{4}$$

где Δt и $\Delta\Omega$ соответственно протяженность сигнала в координатном пространстве и ширина его фурье-спектра. Функции, описывающие квантово-механические объекты, можно рассматривать как сигналы в координатном и частотном пространствах, поскольку частотное пространство является аналогом пространства импульсного. Умножая (4) на постоянную Планка, получаем

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{5}$$

где $\Delta E = \hbar\Delta\Omega$. Это соотношение неопределенностей Гейзенберга для флуктуаций временных интервалов и энергии в квантово-механических масштабах.

Импульсное и частотное пространства в квантовой механике связаны соотношением $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Умножая и разделяя левую часть неравенства (4) на групповую скорость v в направлении, например, оси z и учитывая $\mathrm{v}\Delta t = \Delta z$, $\frac{\Delta\Omega}{\mathrm{v}} = \Delta k_{\text{в}}$, получаем

$$\Delta z \Delta k_{\text{в}} \geq \frac{1}{2}, \tag{6}$$

где $k_{\text{в}} = \Omega/\mathrm{v}$. Соотношение (6) связывает неопределенности пространственной Δz и частотной $\Delta k_{\text{в}}$ координат. Умножая неравенство (6) на постоянную Планка и учитывая, что $\hbar k_{\text{в}} = p$, получаем соотношение неопределенностей Гейзенберга для квантово-механического объекта в координатном и импульсном пространствах

$$\Delta z \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{7}$$

Пространственно-частотный образ движущегося тела как фурье-спектр физического сигнала реализуем. Его волновые свойства проявляются, например, в дифракционных явлениях и в эффекте Доплера. В корпускулярно-волновом дуализме нет противоречивости, он «означает лишь, что адекватный способ описания определяется выбранным методом наблюдения» [4]. Концепция корпускулярно-волнового дуализма основана на фурье-сопряженных математических моделях движения корпускулы, адекватных отображающим ее сигналам в координатном и частотном (импульсном) пространствах с учетом связи частотного и импульсного пространств через квант действия ($E = \hbar\omega$, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$)). Сигналы, регистрируемые наблюдателем в координатном и импульсном пространствах, удовлетворяют фундаментальному принципу неопределенности. Из него следуют соотношения неопределенностей для протяженности сигнала в координатном пространстве и ширины его фурье-спектра, частным случаем которых являются соотношения неопределенностей Гейзенберга.

Литература

1. *Де Бройль Л.* Польза и уроки истории наук // По тропам науки. М.: ИЛ, 1962. С. 296–316.
2. *Дубнищев Ю.Н.* Теория и преобразование сигналов в оптических системах. СПб.: Лань, 2011. 368 с.

3. *Дубнищев Ю.Н., Попова Т.Я.* Пространственно-частотные резонансы в нелинейно поглощающей ячейке // Письма в ЖТФ. 1978. Т. 4, № 9. С. 526–529.
4. *Поль Р.В.* Оптика и атомная физика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. 552 с.
5. *Сарангов Ц.С., Спасский Б.И.* Роль аналогий в открытии квантовой механики // История и методология естественных наук. Вып. II: Физика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963. С. 183–208.

Bibliography

1. *De Brojl' L.* Pol'za i uroki istorii nauk // Po tropam nauki. M.: IL, 1962. P. 296–316.
2. *Dubnishhev Ju.N.* Teorija i preobrazovanie signalov v opticheskih sistemah. SPb.: Lan', 2011. 368 p.
3. *Dubnishhev Ju.N., Popova T.Ja.* Prostranstvenno-chastotnye rezonansy v nelinejno pogloshhajushhej jachejke // Pis'ma v ZhTF. 1978. T, 4. № 9. P. 526–529.
4. *Pol' R.V.* Optika i atomnaja fizika. M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1966. 552 p.
5. *Sarangov C.S., Spasskij B.I.* Rol' analogij v otkrytii kvantovoj mehaniki // Istorija i metodologija estestvennyh nauk. Vyp. II: Fizika. M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1963. P. 183–208.