ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОИСКИ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

УДК 330.45 + 51-77 + 517.977.5

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ КОММУНИКАЦИОННЫХ ЗАТРАТ

И.А. Быкадоров
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, НИУ НГУ, НИУ ВШЭ
E-mail: bykadorov.igor@mail.ru

М.В. Пудова
Новосибирский государственный университет
экономики и управления «НИНХ»
E-mail: pudova@ngs.ru

Изучается одноепериодная линейная динамическая модель маркетинга. Цель исследования – получение оптимального значения доли затрат на рекламу в общей структуре коммуникационных затрат. Установлена зависимость оптимальной структуры коммуникационных затрат от соотношения факторов (параметров) рынка, влияющих на процесс продаж отрицательно и/или положительно.

Ключевые слова: маркетинговые коммуникационные затраты, реклама, стимулирование сбыта, оптимальное управление, маркетинг.

OPTIMIZATION OF STRUCTURE OF COMMUNICATION COSTS

I.A. Bykadorov
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, NRU NSU, NRU HSE
E-mail: bykadorov.igor@mail.ru

M.V. Pudova
Novosibirsk State University of Economics and Management
E-mail: pudova@ngs.ru

Single-period linear dynamic marketing model is examined. Obtaining of optimal value of share of advertising costs in the overall structure of communication costs is the goal of the research. Dependence of optimal structure of communication costs on proportion of market factors (parameters), influencing the sales process negatively and/or positively, is defined.

Key words: marketing communication costs, advertising, sales promotion, optimum control, marketing.

Введение

Работа посвящена исследованию динамической модели маркетинга и основана на идеях, изложенных в [2, 4, 5]. Первой работой в этой области принято считать [11]. В дальнейшем модели подобного рода изучались многими авторами (см., например, [6, 8–10, 13], а также обзорную статью [7]).

Рассматривается фирма-производитель, которая продает некоторую продукцию. Фирма должна достигнуть в конце периода продаж фиксированного уровня гудвилла с минимальными затратами на коммуникации. Модели формулируются как линейные задачи оптимального управления. Фазовыми переменными являются уровень продаж к моменту времени t и уровень гудвилла в момент времени t. Осуществляемое фирмой управление – уровень затрат на (маркетинговые) коммуникации, которые в нашей, упрощенной, модели делятся на рекламу и стимулирование сбыта.

Под понятием «***гудвилл***» компании понимается репутация, уважение, респектабельность, известность и высокая оценка компании и ее продукции, отношения с клиентами, заказчиками[1].

Термин «***стимулирование сбыта***» [1, с. 227] «разнообразные краткосрочные побудительные приемы, призванные ускорить или увеличить покупки товаров или использование услуг».

Работа посвящена оптимизации структуры коммуникационных затрат: поиску оптимальных значений долей затрат на рекламу (ρ) и стимулирование сбыта ($1 - \rho$).

Основной результат работы может быть сформулирован следующим образом: *Установлена зависимость оптимальной структуры коммуникационных затрат от соотношения факторов (параметров) рынка, влияющих на процесс продаж отрицательно (например, перенасыщенность рынка) и/или положительно (например, репутация и квалификация производителей). Найден алгоритм поиска оптимального решения. Исследован вид оптимального управления и область допустимых решений.*

Формальное описание модели

Определим

$x(t)$ – объем продукции, проданный к моменту времени $t \in [t_1, t_2]$, т.е. за период $[t_1, t]$,

$A(t)$ – уровень гудвилла в момент времени $t \in [t_1, t_2]$,

$a(t)$ – затраты на коммуникации в момент $t \in [t_1, t_2]$.

---

[1] Существует несколько толкований слова «гудвилл». Например, в [14] о гудвилле написано следующее: «Это разница в определенный момент времени между оценкой компании фондовой биржей и суммой чистых, нетто-активов, зарегистрированных в балансе компании. Если другое предприятие желает приобрести эту компанию, гудвилл представляет премию, которую должен быть готов выплатить покупатель сверх стоимости активов компании, потому что торговые связи компании, репутацию, известные торговые марки, опыт руководителей и общие технологии невозможно выразить в точных суммах. Если компания имеет плохой торговый послужной список, ее рыночная стоимость как действующего предприятия для потенциального покупателя может оказаться ниже, чем общая стоимость активов по балансу компании, в этом случае гудвилл является отрицательным. Гудвилл является неосязаемым основным капиталом и может отражаться в балансе компании». При всей условности этих суждений бесспорно одно: есть возможность оценивать гудвилл численно.

Затраты на коммуникации делятся на[2]
• затраты на рекламу (доля $\rho \in [0,1]$);
• затраты на стимулирование сбыта (доля $(1-\rho)$).

$$\rho a(t) \longleftarrow a(t) \longrightarrow (1-\rho)a(t)$$

Общие затраты на коммуникации фирмы-производителя таковы:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt \to \min.$$

Заметим, что $\dot{x}(t)$ представляет собой объем сбыта в момент времени *t*, и мы предполагаем, что он совпадает с потребительским спросом в момент времени *t*. Иными словами, фирма продает в точности всю произведенную продукцию.

Предполагается, что

1) динамика уровня продаж возрастает с ростом гудвилла и с увеличением затрат на коммуникации и определяется уравнением:

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \delta_x A(t) + \gamma_x (1-\rho)a(t),$$

где $\alpha > 0$ – коэффициент насыщения, $\delta_x > 0$ – коэффициент продуктивности гудвилла, $\gamma_x > 0$ – коэффициент продуктивности стимулирования сбыта;

2) уровень гудвилла тем выше, чем больше объем продаж и затраты на коммуникации:

$$\dot{A}(t) = \beta x(t) - \delta_A A(t) + \gamma_A \rho a(t),$$

где $\beta > 0$ – эффект «word-of-mouth», $\delta_{\dot{A}} > 0$ – коэффициент забывания, $\gamma_A > 0$ – коэффициент продуктивности рекламы;

3) в начальный момент времени уровень продаж нулевой, в конечный момент он составляет весь объем произведенной фирмой продукции. Также считается, что затраты на коммуникации не могут превышать заранее известной величины. За время периода продаж фирма пытается достигнуть уровня гудвилла $\tilde{A}$, который изначально равен $\bar{A}$.

Итак, задачу оптимального управления можно сформулировать следующим образом.

<u>Задача P</u>.

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt \to \min,$$

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \delta_x A(t) + \gamma_x (1-\rho)a(t),$$

[2] Под коммуникациями мы понимаем «маркетинговые коммуникации», основными инструментами которых [1, с. 227] являются «…реклама…, стимулирование сбыта, …, спонсорство, …, связи с общественностью, …, прямой маркетинг, … личные продажи…». Мы рассматриваем упрощенную модель, в которой коммуникации состоят из рекламы и стимулирования сбыта. Мы предпочли именно такое определение маркетинговых коммуникаций как наиболее распространенное, хотя в [15] реклама рассматривается как составная часть «стимулирования сбыта».

$$\dot{A}(t) = \beta x(t) - \delta_A A(t) + \gamma_A \rho a(t),$$
$$x(t_1) = 0, \quad x(t_2) = \bar{m},$$
$$A(t_1) = \bar{A}, \quad A(t_2) = \tilde{A},$$
$$a \in [0, \bar{a}],$$

где $\rho \in [0,1]$ – доля затрат на рекламу по отношению к общим затратам, все коэффициенты положительны.

Замечание. Сформулированная задача является «задачей с закрепленным концом». Это условие можно, в частности, интерпретировать как требование продать в конце интервала продаж всю произведенную продукцию. Это требование характерно для ситуации продаж «сезонной» продукции. Другим атрибутом сезонности считают предположение, что интервал продаж $[t_1, t_2]$ сравнительно невелик.

Известные результаты и окончательная постановка задачи

Как обычно, будем предполагать, что выполнено условие общности положения (УОП [3, 12]).

Известно, что вид оптимального управления зависит от знака собственных чисел

$$\lambda_1 = \frac{\alpha + \delta_A - \sqrt{(\alpha - \delta_A)^2 + 4\beta\delta_x}}{2} \tag{1}$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha + \delta_A + \sqrt{(\alpha - \delta_A)^2 + 4\beta\delta_x}}{2} \tag{2}$$

матрицы

$$-Q^T = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\delta_x & \delta_A \end{pmatrix},$$

где Q – матрица системы дифференциальных уравнений модели. Эти собственные числа являются вещественными. Более того, $\lambda_2 > \lambda_1$, $\lambda_2 > 0$, причем знак λ_1 совпадает со знаком выражения $\alpha\delta_A - \beta\delta_x$. Заметим, что в силу УОП $\lambda_1 \neq 0$ (см. (1)).

Интересно отметить:

• При $\lambda_1 > 0$ считается, что рынок «плохой», т.е. «отрицательные» параметры рынка «перевешивают» «положительные».

• При $\lambda_1 < 0$ – рынок «хороший».

Структура оптимального управления $a^*(t)$ имеет следующий вид [4, с. 114]:

1. Если $\lambda_1 < 0$, то для некоторых $t_1 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t_2$ имеем:

$$a^*(t) = \begin{cases} \bar{a}, t \in (t_1, \tau_1), \\ 0, t \in (\tau_1, \tau_2), \\ \bar{a}, t \in (\tau_2, t_2). \end{cases}$$

2. Если $\lambda_1 > 0$, то для некоторых $t_1 \le \tau_1 \le \tau_2 \le t_2$ имеем:

$$a^*(t) = \begin{cases} 0, t \in (t_1, \tau_1), \\ \overline{a}, t \in (\tau_1, \tau_2), \\ 0, t \in (\tau_2, t_2). \end{cases}$$

Моменты переключения τ_1, τ_2 определяются системой алгебраических уравнений, причем не могут быть вычислены явно.

Удобно работать в двумерном пространстве переменных k_1, k_2, которые однозначно определяются граничными значениями фазовых переменных $x(t), A(t)$ и параметром ρ. Определим множество пар (k_1, k_2), которым отвечает задача, имеющая допустимое управление. Для этого введем функции:

$$\begin{aligned} f_-(k_1,k_2) &= \frac{1}{\lambda_1}\ln(e^{\lambda_1 t_2} - \lambda_1 k_1) - \frac{1}{\lambda_2}\ln(e^{\lambda_2 t_2} - \lambda_2 k_2), \\ f_+(k_1,k_2) &= \frac{1}{\lambda_1}\ln(e^{\lambda_1 t_1} + \lambda_1 k_1) - \frac{1}{\lambda_2}\ln(e^{\lambda_2 t_1} + \lambda_2 k_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Утверждение [4, с. 120]. *Если $f_+(k_1,k_2) > 0$ или $f_-(k_1,k_2) > 0$, то не существует допустимого управления задачи. В противном случае оптимальным управлением задачи являются:*

– «альтернативные коммуникации типа $\overline{a} - 0 - \overline{a}$», если $f_+(k_1,k_2) < 0$, $f_-(k_1,k_2) < 0$, $\lambda_1 < 0$;

– «альтернативные коммуникации типа $0 - \overline{a} - 0$», если $f_+(k_1,k_2) < 0$, $f_-(k_1,k_2) < 0$, $\lambda_1 > 0$;

– «ранние коммуникации $\overline{a} - 0$», если $f_+(k_1,k_2) = 0$, $f_-(k_1,k_2) < 0$;

– «поздние коммуникации $0 - \overline{a}$», если $f_+(k_1,k_2) < 0$, $f_-(k_1,k_2) = 0$;

– «максимальные коммуникации» или «отсутствие коммуникаций», если $f_+(k_1,k_2) = 0$, $f_-(k_1,k_2) = 0$.

Все ***допустимые*** пары (k_1,k_2) (т.е. пары, при которых задача имеет допустимое решение) принадлежат некоторому множеству

$$V = \bigcup_{i=1}^{5} V_i,$$

где

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(k_1,k_2) : f_+(k_1,k_2) < 0, f_-(k_1,k_2) < 0\}, \\ V_2 &= \{(k_1,k_2) : f_+(k_1,k_2) = 0, f_-(k_1,k_2) < 0\}, \\ V_3 &= \{(k_1,k_2) : f_+(k_1,k_2) < 0, f_-(k_1,k_2) = 0\}, \\ V_4 &= \left\{\left(\frac{1}{\lambda_1}(e^{\lambda_1 t_2} - e^{\lambda_1 t_1}), \frac{1}{\lambda_2}(e^{\lambda_2 t_2} - e^{\lambda_2 t_1})\right)\right\}, \\ V_5 &= \{(0,0)\}, \end{aligned}$$

т.е. V_1 – область альтернативных коммуникаций, V_2 – кривая ранних коммуникаций, V_3 – кривая поздних коммуникаций, V_4 – точка максимальных коммуникаций, V_5 – точка отсутствия коммуникаций. Графически область V выглядит следующим образом (рис. 1):

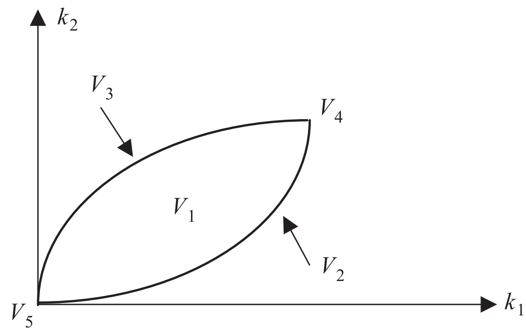

Рис. 1. Множество допустимых пар (k_1, k_2)

Множество V можно построить явно, оно зависит только от значений $\lambda_1, \lambda_2, t_1, t_2$.

Каждой точке множества V отвечает конкретная задача. Допустим, что $(k_1, k_2) \in V$, а значения $\overline{m}, \overline{A}, \tilde{A}$ фиксированы. Будем варьировать параметр ρ, т.е. рассматривать роль ***веса затрат на рекламу по отношению к общим затратам***. Изменяя ρ, мы меняем значения k_1, k_2, где

$$k_i = \frac{g_i}{b_i\rho + c_i}, \tag{4}$$

$b_1, b_2, c_1, c_2, g_1, g_2$ – некоторые фиксированные числа,

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = e^{t_2\Lambda} S^{-1} X(t_2) - e^{t_1\Lambda} S^{-1} X(t_1),$$

$$S = \begin{pmatrix} \delta_x & \delta_x \\ \alpha - \lambda_1 & \alpha - \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ A(t) \end{pmatrix}.$$

Так как $\rho \in [0, 1]$, то пара $(k_1, k_2) \in V$ лежит на ветви гиперболы (рис. 2):

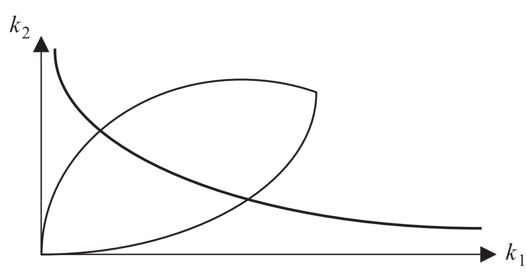

Рис. 2

Рассмотрим $\Im$ – семейство задач, получающихся из задачи P путем фиксирования всех параметров модели, за исключением ρ. Обозначим через P_ρ задачу из семейства $\Im$, для которой доля рекламы в структуре коммуникационных затрат равна ρ.

Нас интересуют **допустимые** $\rho \in [0, 1]$, т.е. такие ρ, что соответствующая задача P_ρ имеет допустимое управление.

Замечание. *Графически допустимость* $\rho \in [0, 1]$ *означает, что соответствующая точка гиперболы принадлежит множеству V.*

Обозначим через Ω_P множество таких значений $\rho\in[0,1]$, что задача $P_\rho \in \Im$ имеет допустимое решение.

Замечание. *В силу выполнения УОП, если задача P_ρ имеет хоть одно допустимое управление, то она имеет и оптимальное управление [10, с. 166].*

Обозначим через $a_\rho^*(t)$ оптимальное управление задачи P_ρ.

Каждому $\rho\in\Omega_P$ сопоставим оптимальное значение целевой функции

$$\nu(\rho)=\int_{t_1}^{t_2} a_\rho^*(t)dt.$$

Итак, задача – ***минимизировать функцию*** $\nu(\rho)$ ***на множестве*** Ω_P.

Рассмотрим два случая, «хорошего» и «плохого» рынка.

Случай $\lambda_1>0$, «плохой» рынок

В этом случае целевая функция имеет вид

$$\nu(\rho)=\int_{t_1}^{t_2} a_\rho^*(t)dt=\bar{a}(\tau_2-\tau_1). \tag{5}$$

Утверждение 1. *Пусть* $\tau_1<\tau_2$.

1. *Имеет место представление*

$$\frac{d\nu}{d\rho}=\frac{\bar{a}}{N}k_1k_2\left(\frac{b_1\lambda_2}{g_1}k_1-\frac{b_2\lambda_1}{g_2}k_2\right), \tag{6}$$

где $N=-e^{\lambda_1\tau_1+\lambda_2\tau_2}+e^{\lambda_1\tau_2+\lambda_2\tau_1}$.

2. *Уравнение* $\dfrac{d\nu}{d\rho}=0$ *относительно* ρ *имеет единственное решение*

$$\rho^*=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\tilde{n}_1}{b_1}\lambda_1-\frac{c_2}{b_2}\lambda_2\right). \tag{7}$$

Утверждение 2. *Для* ρ^*, *определяемого формулой (7), имеем*

$$\left.\frac{d^2\nu}{d\rho^2}\right|_{\rho=\rho^*}<0.$$

Из утверждения 1 и 2 следует, что ρ^* – это единственная стационарная точка функции ν; более того, это точка максимума.

Случай $\lambda_1<0$, «хороший» рынок

В этом случае целевая функция имеет вид

$$\nu(\rho)=\int_{t_1}^{t_2} a_\rho^*(t)dt=\bar{a}(\tau_1-t_1+t_2-\tau_2). \tag{8}$$

Утверждение 3. *Пусть* $\tau_1<\tau_2$.

1. *Имеет место представление*

$$\frac{d\nu}{d\rho}=\frac{\bar{a}}{N}\left(\frac{b_2k_2}{d_2}\lambda_1h_1-\frac{b_1k_1}{d_1}\lambda_2h_2\right). \tag{9}$$

2. Решение уравнения $\frac{d\nu}{d\rho}=0$ относительно ρ сводится к решению квадратного уравнения.

Утверждение 4. *Вторая производная в каждой из стационарных точек* $\left.\frac{d^2\nu}{d\rho^2}\right|_{\rho=\rho^*}$ *может быть как положительной, так и отрицательной.*

Из утверждения 3 и утверждения 4 следует, что можно найти явное выражение для каждой из стационарных точек.

Условие общности положения

Лемма 1. *Для рассматриваемой задачи УОП выполняется в том и только в том случае, если* $\lambda_i \neq 0, i=1,2,$ *и, более того, вектор* $S^{-1}E_S$, *где* $E_S=\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_A\end{pmatrix}$ *не имеет нулевых компонент.*

Лемма 2. *Существует единственное* $\rho^*\in(0,1)$, *такое, что если* $\rho=\rho^*$, *то условие общности положения не выполняется.*

«Плохой» рынок. Алгоритм поиска оптимальной структуры коммуникационных затрат

Алгоритм поиска оптимального ρ состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Нахождение ρ_1^*, ρ_2^* ($\rho_1^*<\rho_2^*$), соответствующих двум точкам пересечения области V с гиперболой (рис. 3) путем решения двух уравнений от одной неизвестной:

$$\left(e^{\lambda_1 t_2}-\lambda_1\frac{g_1}{b_1\rho+c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}=\left(e^{\lambda_2 t_2}-\lambda_2\frac{g_2}{b_2\rho+c_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}}, \qquad (10)$$

$$\left(e^{\lambda_1 t_1}+\lambda_1\frac{g_1}{b_1\rho+c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}=\left(e^{\lambda_2 t_1}+\lambda_2\frac{g_2}{b_2\rho+c_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}}. \qquad (11)$$

Уравнения получаются после подстановки значений $k_i=\frac{g_i}{b_i\rho+c_i}, i=1,2$ в уравнения $f_\pm(k_1,k_2)=0$. Каждое из них можно решить лишь численно.

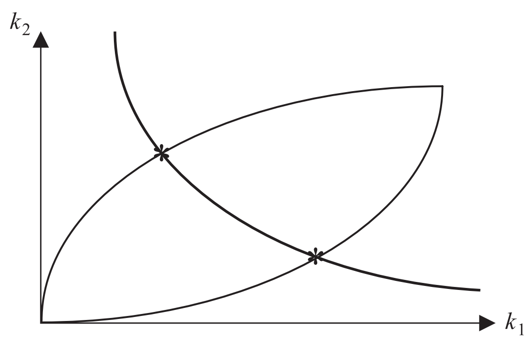

Рис. 3. Нахождение ρ_1^* и ρ_2^*

Шаг 2. Определение принадлежности ρ_1^*, ρ_2^* к одному из следующих случаев:

Случай 1. $\rho_1^* < 0, \rho_2^* > 1$.

В этом случае точки $k_i(0), k_i(1),$ где $k_i(\rho) = \dfrac{g_i}{b_i\rho + c_i}, i = 1,2$, находятся внутри области V. Решением задачи будет *значение* ρ^*, *соответствующее значению функции* $\min\{\nu(0); \nu(1)\}$. Оптимальное управление имеет два переключения (рис. 4):

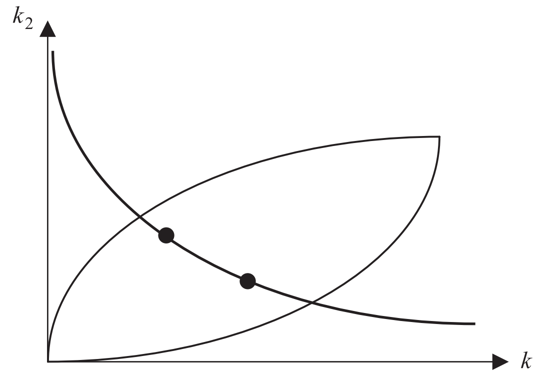

Рис. 4. Точки • соответствуют ситуациям $\rho = \rho_1^*$ и $\rho = \rho_2^*$, $\rho_1^* < 0, \rho_2^* > 1$

Случай 2. $\rho_1^*, \rho_2^* \in [0,1]$.

Решением задачи будет *значение* ρ^*, *соответствующее значению функции* $\min\{\nu(\rho_1^*); \nu(\rho_2^*)\}$. Оптимальное управление имеет одно переключение (рис. 5).

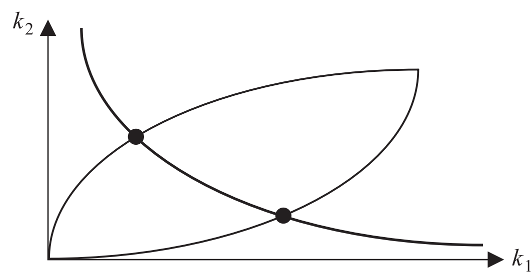

Рис. 5. Точки • соответствуют ситуациям $\rho = \rho_1^*$ и $\rho = \rho_2^*$, $\rho_1^*, \rho_2^* \in [0, 1]$.

Случай 3. $\rho_1^* < 0, \rho_2^* \in [0, 1]$.

Решением задачи будет *значение* ρ^*, *соответствующее значению функции* $\min\{\nu(\rho_2^*), \nu(0)\}$. Оптимальное управление имеет одно переключение (рис. 6).

Случай 4. $\rho_1^* \in [0, 1], \rho_2^* > 1$.

Решением задачи будет *значение* ρ^*, *соответствующее значению функции* $\min\{\nu(\rho_1^*), \nu(1)\}$. Оптимальное управление имеет одно переключение (рис. 7).

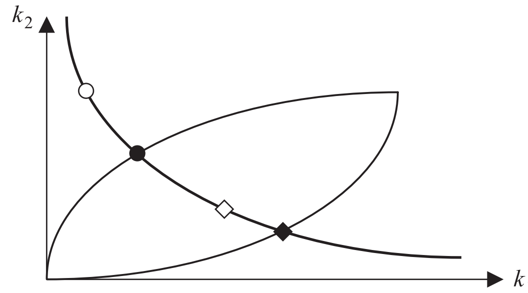

Рис. 6. ● соответствует $\rho = \rho_2^*$; ○ соответствует $\rho = 1$; ◆ соответствует $\rho = \rho_1^* < 0$; ◇ соответствует $\rho = 0$

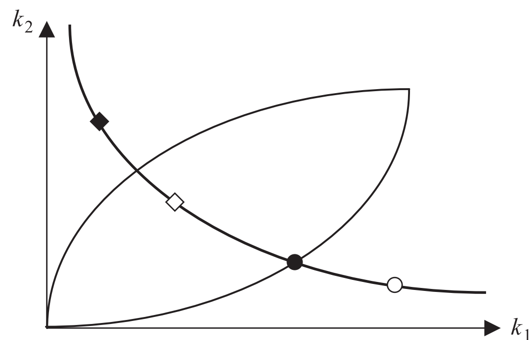

Рис. 7. ● соответствует $\rho = \rho_1^*$; ○ соответствует $\rho = 0$; ◆ соответствует $\rho = \rho_2^*$; ◇ соответствует $\rho = 1$

Случай 5. $\rho_1^*, \rho_2^* < 0$ или $\rho_1^*, \rho_2^* > 1$. Задача в данном случае *решений не имеет*.

«Хороший» рынок: возможные пути исследования

Ситуация $\left.\dfrac{d^2\nu}{d\rho^2}\right|_{\rho=\rho^*} < 0$ аналогична ситуации «плохого» рынка. Решение следует искать при помощи вышеописанного алгоритма.

Если $\left.\dfrac{d^2\nu}{d\rho^2}\right|_{\rho=\rho^*} > 0$, т.е. ρ^* – точка минимума целевой функции, то для поиска оптимального ρ необходимо рассмотреть возможные случаи расположения ρ^* относительно отрезка [0,1] и области *V*:

Случай 1. $\rho^* \in [0,1]$ **и** ρ^* таково, что соответствующая точка гиперболы принадлежит множеству *V*, тогда ρ^* – искомое решение. Оптимальное управление имеет два переключения.

Случай 2. $\rho^* \notin [0,1]$ **или** ρ^* таково, что соответствующая точка гиперболы **не** принадлежит множеству *V*, тогда решение следует искать при помощи вышеописанного алгоритма для случая «плохого» рынка.

Заключение

В работе исследовались две динамические модели маркетинга, в которых фирма-производитель продает некоторую продукцию, минимизируя затраты на коммуникации.

Работа посвящена оптимизации структуры коммуникационных затрат: поиску оптимальных значений долей затрат на рекламу (ρ) и стимулирование сбыта ($1 - \rho$).

Основной результат работы может быть сформулирован следующим образом. Установлена зависимость оптимальной структуры коммуникационных затрат от соотношения факторов (параметров) рынка, влияющих на процесс продаж отрицательно (например, перенасыщенность рынка) и/или положительно (например, репутация и квалификация производителей и продавцов товара). Найден алгоритм поиска оптимального решения.

В качестве дальнейших исследований представляет интерес изучение следующих обобщений рассмотренной в данной работе базовой модели.

1. Рассмотрение ρ (доли затрат на рекламу) не как константу, а зависящую от времени, т.е. являющуюся управлением $\rho(t)$. Задача в этом случае будет нелинейной (билинейной по управлению).

2. Рассмотрение затрат на рекламу и затрат на стимулирование сбыта в качестве отдельных управлений, хотя и связанных ограничением на максимальный объем общих коммуникационных затрат. Модель будет линейной, с двумя управлениями, но множество допустимых управлений не является «прямоугольником» в пространстве управлений, что неминуемо ведет к возникновению трудностей при исследовании задачи оптимального управления.

Благодарности

Авторы благодарят участников семинаров, на которых докладывались результаты статьи за полезные обсуждения. Также благодарим анонимного рецензента, замечания которого существенно улучшили структуру и содержание работы. Исследование частично поддержано грантами РФФИ (№12-01-00667, №13-06-00311) и РГНФ (№13-02-00226).

Литература

1. *Басовский Л.Е., Басовская Е.Н.* Маркетинг: учеб. пособие / 2-е изд., перераб. М: Инфра-М., 2010. 421 с.
2. *Быкадоров И.А., Пудова М.В.* Модель маркетинга на многосегментном рынке // Математические методы в прикладных исследованиях: сб. науч. тр.; Новосиб. гос. ун-т экономики и управления. Вып. 5. Новосибирск: НГУЭУ, 2012. С. 24–39.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов / 2-е изд. М.: Наука, 1969. 384 с.
4. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* Minimization of communication expenditure for seasonal products // RAIRO Operations Research. 2002. V. 36. № 2. P. 109–127.
5. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* A model for the marketing of a seasonal product with different goodwills for consumer and retailer // Journal of Statistics & Management Systems. 2003. V.6. № 1. P. 115–133.
6. *Favaretto D., Viscolani B.* A single production and advertising control problem with bounded final goodwill // J. Inform. Optim. Sci. 2000. V. 21. P. 337–357.

7. *Feichtinger G., Hartl R.F., Sethi S.P.* Dynamic optimal control models in advertising: Resent developments // Management Sci. 1994. V. 40. P. 195–226.
8. *Funari S., Viscolani B.* Advertising and congestion management for a museum temporary exhibition // Central Eur. J. Oper. Res. 2002. V. 10. P. 149-162.
9. *Little J.D.C.* Aggregate advertising models: The state of the art // Oper. Res. 1979. V. 27. P. 629–667.
10. *Naik P.A., Mantrala M.K., Sawyer A.G.* Planning media schedules in the presence of dynamic advertising quality // Marketing Sci. 1998. V. 17. P. 214–235.
11. *Nerlove M., Arrow K.J.* Optimal advertising policy under dynamic conditions // Economica. 1962. V. 29. P. 129–142.
12. *Seierstand A., Sydsaeter K*. Optimal Control Theory with Economic Applications // North-Holland, Amsterdam, 1987. 463 p.
13. *Spremann K*. The signaling of quality by reputation, in Optimal Control Theory and Economic Analysis 2 // edited by G. Feichtinger. North-Holland, Amsterdam, 1985. P. 235–252.
14. *Модеров С.В*. Гудвилл и МСФО. URL: http://www.ippnou.ru/article.php?idarticle=000015.
15. Толковый словарь экономических терминов. URL: http://www.bibliotekar.ru/biznes-15-6/135.htm.

Bibliography

1. *Basovskij L.E., Basovskaja E.N*. Marketing: ucheb. posobie / 2-e izd., pererab. M.: Infra-M, 2010. 421 p.
2. *Bykadorov I.A., Pudova M.V*. Model' marketinga na mnogosegmentnom rynke // Matematicheskie metody v prikladnyh issledovanijah: sb. nauch. tr.; Novosib. gos. un-t jekonomiki i upravlenija. Vyp. 5. Novosibirsk: NGUJeU, 2012. P. 24–39.
3. *Pontrjagin L.S., Boltjanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishhenko E.F.* Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov / 2-e izd. M.: Nauka, 1969. 384 p.
4. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E*. Minimization of communication expenditure for seasonal products // RAIRO Operations Research. 2002. V. 36. № 2. P. 109–127.
5. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E*. A model for the marketing of a seasonal product with different goodwills for consumer and retailer // Journal of Statistics & Management Systems. 2003. V.6. № 1. P. 115–133.
6. *Favaretto D., Viscolani B*. A single production and advertising control problem with bounded final goodwill // J. Inform. Optim. Sci. 2000. V. 21. P. 337–357.
7. *Feichtinger G., Hartl R.F., Sethi S.P*. Dynamic optimal control models in advertising: Resent developments // Management Sci. 1994. V. 40. P. 195–226.
8. *Funari S., Viscolani B*. Advertising and congestion management for a museum temporary exhibition // Central Eur. J. Oper. Res. 2002. V. 10. P. 149–162.
9. *Little J.D.C*. Aggregate advertising models: The state of the art // Oper. Res. 1979. V. 27. P. 629–667.
10. *Naik P.A., Mantrala M.K., Sawyer A.G*. Planning media schedules in the presence of dynamic advertising quality // Marketing Sci. 1998. V. 17. P. 214–235.
11. *Nerlove M., Arrow K.J*. Optimal advertising policy under dynamic conditions // Economica. 1962. V. 29. P. 129–142.
12. *Seierstand A., Sydsaeter K*. Optimal Control Theory with Economic Applications // North-Holland, Amsterdam, 1987. 463 p.
13. *Spremann K*. The signaling of quality by reputation, in Optimal Control Theory and Economic Analysis 2 // edited by G. Feichtinger. North-Holland, Amsterdam, 1985. P. 235–252.
14. *Moderov S.V*. Gudvil i MSFO. URL: http://www.ippnou.ru/article.php?idarticle=000015.
15. Tolkovyj slovar' jekonomicheskih terminov. URL: http://www.bibliotekar.ru/biznes-15-6/135.htm.